

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1. välikoe, (ti 15.12.2015)

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin (myös graafinen laskin on sallittu) ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). opettaja: Matti Laaksonen

1. a) (1p) Laske todellinen vuosikorko, kun kuukausijakson korkokanta on 0,0043526.
 b) (2p) Laske kuukausikorkokanta, kun todellinen vuosikorko on 6,15%
 c) (3p) Määritä tasaerälainan kuukausierä, kun lainan määrä on 13 000 euroa, laina-aika on 14 kuukautta, lainaa lyhennetään kuukausittain, ja todellinen vuosikorko on 4,75%.

Ratkaisu: a)

$$(1 + i_{tod}) = 1,0043526^{12} = 1,053499899$$

joten todellinen vuosikorko on 5,35%

b)

$$1 + i = 1,0615^{1/12} = 1,00498597231,$$

joten kuukausikorkokanta on 0,00498597231.

c)

$$\begin{aligned} \text{tasaera} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot 13\,000 \text{€} \\ &= \frac{[1,0475^{1/12} - 1] \cdot 1,0475^{14/12}}{(1,0475^{14/12} - 1)} \cdot 13\,000 \text{€} \\ &= 955,78 \text{€} \end{aligned}$$

Vastaus: a) 5,35%, b) 0,00498597231, c) 955,78€.

2. Vuodessa raaka-ainevaraston läpi kulkee kappaletavaraa $D = 160\,000$ kpl. Yritys aikoo ulkoistaa raaka-ainetilausten ja raaka-ainevarastojen hoidon. Yritys on saanut tarjoukset kolmelta huolintayritykseltä (H1, H2 ja H3). Yhteenvedo tarjoustien tiedoista on seuraavassa taulukossa.

	tilauserä q (kpl)	Tilaukust. K (€/erä)	Yksikköyllä- pitokust. h (€/kpl/kk)	Tilaukust. (€/vuosi)	Ylläpi- tokust. (€/kk)
H1	sop. mukaan	20.00	0.080	–	–
H2	5 000	50.00	0.050	1 600.00	125.00
H3	10 000	40.00	0.075	640.00	375.00

(Maininta ”sopimuksen mukaan” H1:n tarjouksessa merkitsee sitä, että tilauserä voidaan sopia tilaajan haluamaksi.)

- a) (3p) Määritä optimaalinen tilauserän koko huolintaliikkeen H1 tiedoin ja laske vastaavat tilaus- ja ylläpitokustannukset kahteen viimeiseen sarakkeeseen.
 b) (2p) Tarkista ja tarvittaessa korjaa H2:n ja H3:n osalta tilaus- ja ylläpitokustannukset kahdessa viimeisessä sarakkeessa.
 c) (1p) Mikä tarjous on tilaajalle edullisin?

Ratkaisu: a) Lasketaan ensimmäisen tarjouksen mukainen optimaalinen tilauserä.

$$\begin{aligned} \text{kysyntä } D &= 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}} \\ \text{tilauskustannus } K &= 20,00\text{€} \\ \text{yks.ylläpitokustannus } h &= 0,080 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} = 0,96 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \end{aligned}$$

optimaalinen tilauserä on nyt

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20,00\text{€} \cdot 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{0,96 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}}}} = 2582\text{kpl}$$

Tilauskustannus on silloin

$$\frac{KD}{q_0} = \frac{20,00\text{€} \cdot 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{2582\text{kpl}} = 1\,239,35 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}},$$

ja ylläpitokustannus on silloin

$$h \cdot \frac{q_0}{2} = 0,080 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} \cdot \frac{2582\text{kpl}}{2} = 103,28 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$$

Kustannustaulukko täydentyy siis muotoon

	tilauserä q (kpl)	Tilauskust. K (€/erä)	Yksikköyllä- pitokust. h (€/kpl/kk)	Tilauskust. (€/vuosi)	Ylläpi- tokust. (€/kk)
H1	2 582	20.00	0.080	1 239,35	103,28
H2	5 000	50.00	0.050	1 600.00	125.00
H3	10 000	40.00	0.075	640.00	375.00

b) Tarkistetaan H2:n ja H3:n osalta tilauskustannuksen ja ylläpitokustannusten arvot taulukossa

Tarjous H2:

$$\begin{aligned} \frac{KD}{q} &= \frac{50,00\text{€} \cdot 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{5\,000\text{kpl}} = 1\,600,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}, \quad \text{OK} \\ h \cdot \frac{q}{2} &= 0,050 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} \cdot \frac{5\,000\text{kpl}}{2} = 125,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}, \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Tarjous H3:

$$\begin{aligned} \frac{KD}{q} &= \frac{40,00\text{€} \cdot 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{10\,000\text{kpl}} = 640,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}, \quad \text{OK} \\ h \cdot \frac{q}{2} &= 0,075 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} \cdot \frac{10\,000\text{kpl}}{2} = 375,00 \frac{\text{€}}{\text{kk}}, \quad \text{OK} \end{aligned}$$

c) Valitaan tarjouksista edullisin laskemalla vuotuiset kokonaiskustannukset

$$\begin{aligned} TC_{H1} &= 1\,239,35 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 12 \cdot 103,28 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 2\,478,71 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \\ TC_{H2} &= 1\,600,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 12 \cdot 125,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 3\,100,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

$$TC_{H3} = 640,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 12 \cdot 375,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 5\,140,00 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

Ensimmäinen tarjous on siis edullisin.

Vastaus: a) Ensimmäisen tarjouksen mukainen optimaalinen tilauserä on 2582kpl, Silloin vuotuinen tilauskustannus on 1239,35€/vuosi ja ylläpitokustannus on 103,28€/kk

(= 1239,36€/vuosi)

b) Toisen ja kolmannen tarjouksen kustannukset ovat taulukossa oikein

c) Ensimmäinen tarjous on edullisin, koska siinä vuotuinen kokonaiskustannus on pienin.

3. Yritys valmistaa q tuotetta viikossa. Kysyntäfunktio on $p = 100 - 0.15q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.1q^2 + 35q + 700$.

a) Millä tuotantomäärällä voitto on suurin?

b) Mikä on voitto silloin?

c) Miten muuttuvat a- ja b-kohdan vastaukset, kun kiinteät kustannukset nousevat 20%?

Ratkaisu: a)

$$\text{kysyntäfunktio } p = 100 - 0,15q$$

$$\text{tuottofunktio } R(q) = q \cdot p = 100q - 0,15q^2$$

$$\text{rajabuotto } MR = R'(q) = 100 - 0,30q$$

$$\text{kustannusfunktio } C(q) = 0,1q^2 + 35q + 700$$

$$\text{rajakustannus } MC(q) = C'(q) = 0,2q + 35$$

Optimissa

$$MC = MR$$

$$\Leftrightarrow 0,2q + 35 = 100 - 0,30q$$

$$\Leftrightarrow 0,50q = 65$$

$$\Leftrightarrow q = 130$$

b)

$$\begin{aligned} P(130) &= R(130) - C(130) \\ &= (100 \cdot 130 - 0,15 \cdot 130^2) - (0,1 \cdot 130^2 + 35 \cdot 130 + 700) \\ &= (13\,000 - 2\,535) - (1\,690 + 4\,550 + 700) \\ &= 3\,525 \end{aligned}$$

c) Kun kiinteät kustannukset kasvavat 20% niin uusi kiinteiden kustannusten arvo on $1,20 \cdot 700 = 840$. Vakiotermin arvon muutos ei vaikuta rajakustannukseen, joten a-kohdan vastaus ei muutu. Optimi-tuotantomäärä on edelleen 120. Silloin b-kohdassa tuoton arvo ($R(120)$) ei muutu ja kustannusten kokonaisu-määrä ($C(120)$) kasvaa saman verran kuin kiinteä kustannus kasvoi, eli 140. Siis b-kohdan vastaus pienenee 140:llä.

Vastaus: a) 120, b) 3 525 c) a-kohdan vastaus ei muutu ja b-kohdan vastaus pienenee 140:llä.

4. a) (2p) Selitä lyhyesti, mitä tarkoittaa y :n jousto x :n suhteen.

b) (3p) Tuotteen kysynnän hintajousto on $-1,8$. Tuotteen hinta on nyt $5,00$ euroa ja kysyntä $250\,000$ tuotetta vuodessa. Miten tuotteen kysyntä muuttuu, kun hinta lasketaan $4,80$ euroon?

c) (1p) Laske arvio b-kohdan tuotannon 'rajatuotolle'.

Ratkaisu: a) y :n jousto x :n suhteen on y :n prosenttimuutos jaettuna x :n prosenttimuutoksella.

b)

$$\text{hinta nyt } p = 5,00\text{€}/\text{kpl}$$

$$\text{kysyntä nyt } q = 250\,000\text{kpl}/\text{vuosi}$$

$$\text{hinnan muutos } \Delta p = -0,20\text{€}/\text{kpl}$$

$$\text{kysynnän muutos } \Delta q = x$$

$$\text{kys. hintajousto } khj = -1,8$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = khj$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{-0,20\text{€}/\text{kpl}} \cdot \frac{5,00\text{€}/\text{kpl}}{250\,000\text{kpl}/\text{vuosi}} = -1,8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1,80 \cdot (-0,20\text{€}/\text{kpl}) \cdot 250\,000\text{kpl}/\text{vuosi}}{5,00\text{€}/\text{kpl}} = +18\,000\text{kpl}/\text{vuosi}$$

c) Rajatuotto on tuoton ($R(q)$) lisäys, kun tuotantoa lisätään yhdellä ($250\,000 \rightarrow 250\,001$). Arvioimme hinnan ja tuoton muutoksia silloin:

$$\text{hinta nyt } p = 5,00\text{€}/\text{kpl}$$

$$\text{kysyntä nyt } q = 250\,000\text{kpl}/\text{vuosi}$$

$$\text{määrän muutos } \Delta q = +1\text{kpl}/\text{vuosi}$$

$$\text{hinnan muutos } \Delta p = y\text{€}/\text{kpl}$$

$$\text{kys. hintajousto } khj = -1,8$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = khj \Leftrightarrow \frac{+1\text{kpl}/\text{vuosi}}{y\text{€}/\text{kpl}} \cdot \frac{5,00\text{€}/\text{kpl}}{250\,000\text{kpl}/\text{vuosi}} = -1,8$$

$$\Leftrightarrow \frac{+1\text{kpl}/\text{vuosi}}{-1,8} \cdot \frac{5,00\text{€}/\text{kpl}}{250\,000\text{kpl}/\text{vuosi}} = y\text{€}/\text{kpl}$$

$$\Leftrightarrow y = -0,00001111\text{€}/\text{kpl}$$

$$\text{uusi tuotto } R(250\,001) = 250\,001 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}} \cdot 4,99998889 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 1\,250\,002,222 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

$$\text{tuotto nyt } R(250\,000) = 250\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}} \cdot 5,00 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 1\,250\,000 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

$$\text{rajatuotto } MR(250\,000) = \frac{\Delta R}{\Delta q} = \frac{2,222 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}{1 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}} = 2,22 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$$

Vastaus: b) Tuotteen vuosikysyntä kasvaa $18\,000$:lla tuotteella. c) Rajatuotto on $2,22\text{€}/\text{kpl}$.

Kaavoja:

Jaksolliset suoritukset

$$\begin{aligned}\text{prolongointitekijä } s_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ \text{diskonttaustekijä } a_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\ \text{kuoletuskerroin } c_{n,i} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\end{aligned}$$

Interpolointi:

$$\hat{y} = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Varastomalleista

$$\begin{aligned}\text{perusmalli } q_0 &= \sqrt{\frac{2KD}{h}} \\ \text{puutemalli } q_1 &= q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}}, \\ TC_1(q) &= \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q} \\ \text{tuotantomalli } q_2 &= q_0 \sqrt{\frac{r}{r-D}}, \quad M_2 = q_0 \sqrt{\frac{r-D}{r}}, \\ TC_2(q) &= \frac{KD}{q} + \frac{hq(r-D)}{2r}\end{aligned}$$

Derivaatta ja 2. asteen yhtälö

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(ax^n) &= nax^{n-1} \\ ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

Korkokaavat

$$\text{Yksinkertainen: } K_t = (1+it)K_0 = \left(1 + \frac{P}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

$$\text{Koronkorko: } K_t = (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Jatkuva: } K_t = (1+i)^t K_0 = e^{pt} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^p$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i}K_0, \quad \text{osamaksuerä } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

Aritmeettinen- ja geometrinen summa

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$