

Summat ja keskiluvut

Aritmeettinen summa

Geometrinen summa

Lukujen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ summa ja tulo voidaan kirjoittaa seuraavasti

Summa
$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k$$

"summa k käy 1:stä 10:een a_k "

Tulo
$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{10} = \prod_{k=1}^{10} a_k$$

"tulo k käy 1:stä 10:een a_k "

Ensimmäinen summausindeksin arvo ei aina ole 1, ja silloin termien lukumäärä ei ole sama kuin indeksin viimeinen arvo. Esim.

$$\begin{aligned}\sum_{j=4}^9 2j &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 \\ &= 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18\end{aligned}$$

Summausindeksi saa ensimmäisessä termissä arvon 4 ja viimeisessä termissä arvon 9.

Termejä on kaikkiaan $9 - 4 + 1 = 6$ kappaletta!

Kolmen luvun a_1 , a_2 ja a_3 keskimääräistä kokoa voidaan kuvata kahdella tavalla

Keskiarvo. Summa ei muutu, jos summan jokainen termi korvataan termien keskiarvolla ka

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + a_3 &= ka + ka + ka \\ \Rightarrow ka &= \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)\end{aligned}$$

Keskiverto. Tulo ei muutu, jos tulon jokainen tekijä korvataan termien keskiverrolla kv

$$\begin{aligned}a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 &= kv \cdot kv \cdot kv \\ \Rightarrow kv &= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

Yleisemmin:

Lukujen $a_1, a_2, \dots, a_N$ keskiarvo on

$$ka = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N a_s.$$

Lukujen $a_1, a_2, \dots, a_N$ keskiverto on

$$kv = \left(\prod_{s=1}^N a_s \right)^{\frac{1}{N}}$$

Kuriositeetti: "Logaritmi lukujen keskiarvosta on keskiarvo lukujen logaritmeista."

$$\begin{aligned}\log kv &= \log \left(\left(\prod_{t=1}^N a_t \right)^{\frac{1}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \log \left(\prod_{t=1}^N a_t \right) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \log a_t\end{aligned}$$

Olkoon p_t osakkeen hinta päivänä t . Silloin $r_t = \ln(p_t/p_{t-1})$ on päivätuotto. Keskimääräinen päivätuotto on

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_t = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ln p_t/p_{t-1} = \frac{1}{N} \cdot \ln \left(\prod_{t=1}^N \frac{p_t}{p_{t-1}} \right) = \frac{1}{N} \cdot \ln \left(\frac{p_N}{p_0} \right)$$

Aiheet

Summat ja
keskiluvut

Aritmeettinen
summa

Geometrisen
summa

Summa on aritmeettinen, jos kahden peräkkäisen termin erotus on aina sama luku.

Esimerkki 1. Sarja

$$s = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$

on aritmeettinen koska $7 - 5 = 2$, $9 - 7 = 2$, $11 - 9 = 2$ jne...

Sarjan summa voidaan laskea seuraavasti

$$\begin{array}{rcccccccc} s & = & 5 & + & 7 & + & 9 & + & 11 & + & 13 & + & 15 \\ s & = & 15 & + & 13 & + & 11 & + & 9 & + & 7 & + & 5 \\ \hline 2s & = & 20 & + & 20 & + & 20 & + & 20 & + & 20 & + & 20 \end{array}$$

$$\Rightarrow s = 6 \cdot \frac{(5+15)}{2}$$

Aiheet

Summat ja
keskiluvut

Aritmeettinen
summa

Geometrisen
summa

Aritmeettisen summan

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

summa on

$$s = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}.$$

"Summa on termien lukumäärä kertaa ensimmäisen termin ja viimeisen termin keskiarvo."

$$\sum_{j=4}^9 5j = 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 = 6 \cdot \frac{(20 + 45)}{2} = 195$$

(tarkistus: $20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 = 195$ OK)

Esimerkki 2. Summa

$$s = 1,0 + 1,2 + 1,4 + 1,6 + 1,8 + 2,0 + 2,2 + 2,4 + 2,6 + 2,8 + 3,0$$

on aritmeettinen ja sen arvo on

$$s = 11 \cdot \frac{1,0 + 3,0}{2} = 22$$

Esimerkki 3. Summa

$$s = \sum_{k=2}^{100} (1 + 0,1 \cdot k)$$

on aritmeettinen ja sen arvo on

$$s = 99 \cdot \frac{(1,2 + 11,0)}{2} = 99 \cdot 6,1 = 603,9$$

Aiheet

Summat ja
keskiluvutAritmeettinen
summaGeometrisen
summa

Summa on geometrinen, jos kahden peräkkäisen termin suhde on aina sama luku q .

Esimerkki 4. Sarja

$$s = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

on geometrinen koska $8/16 = 0,5$, $4/8 = 0,5$, $2/4 = 0,5$ jne... Siis $q = 1/2$ ja $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$.

Sarjan summa voidaan laskea seuraavasti

$$\begin{array}{r} s = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 \\ -\frac{1}{2} \cdot s = - 8 - 4 - 2 - 1 - 0,5 \\ \hline (1 - \frac{1}{2})s = 16 - \frac{1}{2} \cdot 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow s = \frac{(16 - \frac{1}{2} \cdot 1)}{(1 - \frac{1}{2})} = \frac{(a_1 - q \cdot a_1 \cdot q^{n-1})}{(1 - q)} = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)}$$

Aiheet

Summat ja
keskiluvut

Aritmeettinen
summa

Geometrisen
summa

Geometrisen summan

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} = q \right)$$

summa on

$$s = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)}.$$

"Summa on ensimmäinen termi kertaa (1 miinus q potenssiin termien lukumäärä) per (1 miinus q)"

$$\sum_{j=0}^4 \frac{16}{2^j} = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 16 \cdot \frac{(1 - (0,5)^5)}{(1 - 0,5)} = 31$$

(tarkistus: $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$ OK)

Esimerkki 5. Summa

$$s = 5 + 1,1 \cdot 5 + 1,1^2 \cdot 5 + \dots + 1,1^{15} \cdot 5$$

on geometrisen ja $q = 1,1$. Summan arvo on

$$s = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)} = 5 \cdot \frac{(1 - 1,1^{16})}{(1 - 1,1)} = 179,75$$

Esimerkki 6. Summa

$$s = 5 + \frac{5}{1,1} + \frac{5}{1,1^2} + \dots + \frac{5}{1,1^{15}}$$

on geometrisen ja $q = \frac{1}{1,1}$. Summan arvo on

$$s = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)} = 5 \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{1,1}\right)^{16}\right)}{\left(1 - \frac{1}{1,1}\right)} = 43,03$$

Aiheet

Summat ja
keskiluvutAritmeettinen
summaGeometrisen
summa

k	$a_k, q = 1,1$	$a_k, q = 1/1,1$
1	5,0000	5,0000
2	5,5000	4,5455
3	6,0500	4,1322
4	6,6550	3,7566
5	7,3205	3,4151
6	8,0526	3,1046
7	8,8578	2,8224
8	9,7436	2,5658
9	10,7179	2,3325
10	11,7897	2,1205
11	12,9687	1,9277
12	14,2656	1,7525
13	15,6921	1,5932
14	17,2614	1,4483
15	18,9875	1,3167
16	20,8862	1,1970
summa	179,7486	43,0304

Aiheet

Summat ja
keskiluvutAritmeettinen
summaGeometrinen
summa