



## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

### 1. välikoe keskiviikkona 16.11.2016

**Ratkaise 3 tehtävää.** Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

**Huomautus kokeen valvojille.** Tähän kokeeseen tulee korkeintaan 10 opiskelijaa. Kokeeseen ilmoittautumisesta on tiedotettu myöhään, joten on odotettavissa, että kaikki opiskelijat eivät ole ehtineet ilmoittautua ajoissa. Pyydän, että kaikki paikalle saapuvat otetaan kokeeseen mukaan. *Matti Laaksonen*

1. Sellu-pohjaisen raaka-aineen kysyntä on 1600 kg/vuosi. Raaka-aineen tilauskustannus on 45,00 euro/tilaus ja raaka-ainevaraston yksikköylläpitokustannus on 0,75 €/kg/kuukausi.

- (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?
- (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa?
- (2p) Miten monta prosenttia 'tilauskustannukset' (vuodessa), 'ylläpitokustannukset' (vuodessa) ja kokonaiskustannukset' (vuodessa) muuttuvat, jos tilauserää kasvatetaan 10% optimiarvosta.

- a) (2p) Mikä on kuukausijakson korkokanta, kun todellinen vuosikorko on 4.82%?
- b) (2p) Mikä on todellinen vuosikorko, jos kuukausijakson korkokanta on 0,0035546735?
- c) (2p) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun laina-aika on 16 kuukautta, lainan määrä on 12 000€, laina hoidetaan kuukausittain ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 4.82%.

3. Yritys valmistaa  $q$  tuotetta viikossa. Kysyntäfunktio on  $p = 140 - 0,010q$  ja vastaava rajakustannusfunktio on  $MC(q) = 0,04q + 20$  ja kiinteät kustannukset ovat  $FC = 50000$ .

- (2p) Millä tuotantomäärällä voitto on suurin?
- (2p) Mikä on maksimivoitto?
- (2p) Miten a- ja b-kohtien vastaukset muuttuvat, jos kiinteät kustannukset kasvavat 50%?

4. a) (3p) Määrittele lyhyesti sanallisesti  $y$ :n jousto  $x$ :n suhteen. (Kerro sanallisesti miten jousto lasketaan.)

b) (3p) Tuotteen hinta on nyt 18.00€ ja kysyntä 9 500 tuotetta kuukaudessa. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa nostetaan 0.90 eurolla, ja tuotteen kysynnän hintajousto on -2,5?

### Kaavoja:

$$\frac{d}{dx}ax^n = n \cdot ax^{n-1}$$

### Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

### Varastomallit:

$$\begin{aligned} \text{perusmalli} \quad q_0 &= \sqrt{\frac{2KD}{h}} \\ \text{puutemalli} \quad q_1 &= q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}}, \\ TC_1(q) &= \frac{KD}{q} + \frac{M^2h}{2q} + \frac{(q-M)^2s}{2q} \end{aligned}$$

### Korkolasku:

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{P}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^{\rho}$$

### Jaksolliset suoritukset

$$\text{prolongointitekijä } s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

### Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti: } k = c_{n,i}K_0 \quad \text{osamaksuerä: } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

### Rajatuotto ja kysynnän hintajousto

$$MR = p \cdot \left(1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}}\right)$$

**Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030**

Opettaja: Matti Laaksonen

**1. välikoe keskiviikkona 16.11.2016****Ratkaise 3 tehtävää.** Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

**Huomautus kokeen valvojille.** Tähän kokeeseen tulee korkeintaan 10 opiskelijaa. Kokeeseen ilmoittautumisesta on tiedotettu myöhään, joten on odotettavissa, että kaikki opiskelijat eivät ole ehtineet ilmoittautua ajoissa. Pyydän, että kaikki paikalle saapuvat otetaan kokeeseen mukaan. *Matti Laaksonen*

1. Sellu-pohjaisen raaka-aineen kysyntä on 1600 kg/vuosi. Raaka-aineen tilauskustannus on 45,00 euro/tilaus ja raaka-ainevaraston yksikköylläpitokustannus on 0,75 €/kg/kuukausi.

- a) (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?  
 b) (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa?  
 c) (2p) Miten monta prosenttia 'tilauskustannukset' (vuodessa), 'ylläpitokustannukset' (vuodessa) ja kokonaiskustannukset' (vuodessa) muuttuvat, jos tilauserää kasvatetaan 10% optimaarivasta.

$$D = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}$$

$$K = 45,00 \text{ €}$$

$$h = 0,75 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{kk}} = 9,00 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}}$$

$$a) \quad q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45 \cdot 1600}{9}} \text{ kg} = \underline{\underline{126,5 \text{ kg}}}$$

$$b) \quad TC_0 = \frac{KD}{q_0} + h \frac{q_0}{2} = \frac{45 \text{ €} \cdot 1600 \frac{\text{kg}}{\text{v}}}{126,5 \text{ kg}} + 9 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{v}} \cdot \frac{126,5 \text{ kg}}{2}$$

$$= 569,17 \frac{\text{€}}{\text{v}} + 569,25 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$= \underline{\underline{1138,42 \text{ €/v}}}$$

$$c) \quad \text{jos } q = 1,10 q_0 = 139,15 \text{ kg}$$

$$q = q_0$$

$$q = 1,10 q_0$$

Muutos

%

$$\text{Tilaukset} \quad 569,21 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$\frac{45 \cdot 1600 \text{ €}}{139,15 \text{ v}} = 517,43 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$-51,78 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$\underline{\underline{-9,10\%}}$$

$$\text{ylläpito} \quad 569,21 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$9 \cdot \frac{139,15 \text{ €}}{2 \text{ v}} = 626,18 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$+56,97 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$\underline{\underline{+10,01\%}}$$

$$TC \quad 1138,42$$

$$1143,61 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$+5,19 \frac{\text{€}}{\text{v}}$$

$$\underline{\underline{+0,46\%}}$$

$$V: a) q_0 = 126,5 \text{ kg}, b) TC_0 = 1138,42 \text{ €/v}$$

c) Til.kulut laskevat 9,10%, ylläpitokulut nousevat 10,01%  
 kokonaiskustannukset kasvavat 0,46%

2. a) (2p) Mikä on kuukausijakson korkokanta, kun todellinen vuosikorko on 4.82%?

b) (2p) Mikä on todellinen vuosikorko, jos kuukausijakson korkokanta on 0,0035546735?

c) (2p) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun laina-aika on 16 kuukautta, lainan määrä on 12 000€, laina hoidetaan kuukausittain ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 4.82%.

$$a) \quad (1+i_{kk})^{12} = 1,0482$$
$$\rightarrow i_{kk} = 1,0482^{1/12} - 1 = \underline{\underline{0,00393057179}}$$

$$b) \quad 1,0035546735^{12} = 1,043499993 \approx 1,0435$$
$$\rightarrow \text{todellinen vuosikorko on } \underline{\underline{4,35\%}}$$

$$c) \quad n = 16$$
$$1+i = 1,0482^{1/12}$$

$$k = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad k_0 = \frac{[1,0482^{1/12} - 1] \cdot 12000 \cdot 1,0482^{16/12}}{1,0482^{16/12} - 1} \cdot 12000 \text{ €}$$

$$= \underline{\underline{775,30 \text{ €}}}$$

$$\left( \text{Tarkistus } 16 \cdot 775,30 \text{ €} \right. \\ \left. \approx 12404,80 \text{ €} \right)$$

3. Yritys valmistaa  $q$  tuotetta viikossa. Kysyntäfunktio on  $p = 140 - 0,010q$  ja vastaava rajakustannusfunktio on  $MC(q) = 0,04q + 20$  ja kiinteät kustannukset ovat  $FC = 50000$ .
- a) (2p) Millä tuotantomäärällä voitto on suurin?
- b) (2p) Mikä on maksimivoitto?
- c) (2p) Miten a- ja b-kohtien vastaukset muuttuvat, jos kiinteät kustannukset kasvavat 50%?

$$p = 140 - 0,010q$$

$$R = 140q - 0,01q^2$$

$$MR = 140 - 0,02q$$

$$MC = 0,04q + 20$$

$$FC = 50000$$

$$C = 0,02q^2 + 20q + 50000$$

a)

$$MC = MR$$

$$0,04q + 20 = 140 - 0,02q$$

$$0,06q = 120 \quad | \cdot 100 : 6$$

$$q = 2000$$

b)

$$P(2000) = R(2000) - C(2000)$$

$$= 140 \cdot 2000 - 0,01 \cdot 2000^2 - (0,02 \cdot 2000^2 + 20 \cdot 2000 + 50000)$$

$$= 280000 - 40000 - 80000 - 40000 - 50000$$

$$= 70000$$

c)

Jos kiinteät kustannukset kasvavat 50%

niin  $FC_{uusi} = 1,50 \cdot FC = 1,50 \cdot 50000 = 75000$

$$\Delta FC = 25000$$

a-kohdan lause ei muutu, koska FC ei ole siinä mitään tavalla mukana

b-kohdassa

$R(2000)$  ei muutu

$C(2000)$  kasvaa 25000:lla

→  $P(2000)$  pienenee 25000:lla (36%:lla)

4. a) (3p) Määrittele lyhyesti sanallisesti y:n jousto x:n suhteen. (Kerro sanallisesti miten jousto lasketaan.)

b) (3p) Tuotteen hinta on nyt 18.00€ ja kysyntä 9 500 tuotetta kuukaudessa. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa nostetaan 0.90 eurolla, ja tuotteen kysynnän hintajousto on -2,5?

a) y:n jousto x:n suhteen on y:n % -muutos jaettuna x:n % -muutolla.

$$\left. \begin{array}{l} p = 18.00 \text{ €} \\ q = 9500 \text{ kpl/kk} \\ \Delta p = +0.90 \text{ €} \\ \Delta q = x \\ \text{jousto} = -2,5 \end{array} \right\}$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{0.90} \cdot \frac{18}{9500} = -2,5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2,5 \cdot 0,90 \cdot 9500}{18} \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$$

$$= -1187,5 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$$

V: kysyntä vähenee 1190 kpl/kk