TAMPEREEN KESÄYLIOPISTO

syksy 2016

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

2. välikoe perjantaina 9.12.2016

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

Huomautus kokeen valvojille. Tähän kokeeseen odotetaan 4 opiskelijaa. Pyydän, että kaikki paikalle saapuvat otetaan kokeeseen mukaan. *Matti Laaksonen*

1. a) (2p) Panos-tuotos -analyysi (Mihin kehitetty? Mitä sillä lasketaan? Minkä hitaaseen muuttumiseen menetelmä perustuu?)
b) (2p) Cramerin kaavat? (Milloin niitä voi käyttää? Milloin niitä kannattaa käyttää?)
c) (2p) Luettele ainakin neljä determinantin ominaisuutta, joiden avulla determinantin laskemista voi helpottaa.

a) Panos-tuotos -analyysi on kehitetty mittaamaan kansantalouden eri sektoreiden (toimialojen) välisiä kytkentöjä (W. Leontiev). Mallin avulla voidaan ennakoida toimialojen kokonaistuotoksia, kun on olemassa ennuste kysynnälle. Menetelmä perustuu siihen, että vaikka kysyntä voikin muuttua nopeasti, niin teknologia-matriisi, joka kuvaa eri toimialojen välisiä riippuvuuksia muuttuu hitaasti.

b) $x_k = D_k / D$ missä x_k on qvadraattisen yhtälöryhmän k:nnen muuttujan arvo ratkaisussa. D_k on determinantin arvo kaaviolle, joka saadaan, kun kerroinkaavion k:s sarake korvataan RHS:llä, ja D on yhtälöryhmän kerroinkaavion determinantti.

Cramerin kaavoja voi käyttää kun kerroinkaavio on säännöllinen ($D \neq 0$)
Cramerin kaavoja kannattaa käyttää, jos kerroinkaaviossa on kirjain-parametrejä tai on ratkaistava vain yhden muuttujan arvo.

c) I Jos kaaviossa on nolla-rivi tai nollasarake, niin kaavion determinantti on $\emptyset$.
II Jos kaaviossa kaksi riviä vaihtaa paikkaa, niin syntyvän uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku.
III Jos kaavion johonkin riviin lisätään luvulla kerrottuna toinen rivi (tyypillinen rivi-operaatio), niin syntyvällä uudella kaaviolla on sama determinantti kuin alkuperäisellä kaaviolla.
IV Kolmiomuodossa olevan kaavion determinantti on diagonaalilla olevien lukujen tulo.

2. a) (3p) Laske integraali $\int(3x^2+4x+7)dx$

b) (3p) Välillä $0 \le x \le 2$ on määritelty tiheysfunktio $f(x) = 0{,}75 \cdot (2x - x^2)$. Laske odotusarvo

$$\mathrm{E}[x] = \int_0^2 x \cdot f(x)\, dx.$$

a) $\int(3x^2+4x+7)\,dx = \frac{3}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 7x + C$

$= \underline{\underline{x^3 + 2x^2 + 7x + C}}$

b) $E[x] = \int_0^2 x\,(0{,}75\cdot(2x - x^2))\,dx$

$= \int_0^2 (1{,}50x^2 - 0{,}75x^3)\,dx = \Big/_0^2 (0{,}50x^3 - 0{,}1875x^4)$

$= (0{,}50\cdot 2^3 - 0{,}1875\cdot 2^4) - (0 - 0)$

$= 4 - 3 = \underline{\underline{1}}$

3. Laske matriisille $\boldsymbol{A}$ a) (2p) determinantti $\det(\mathbf{A})$, b) (3p) käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ ja c) (1p) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T$, kun

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-1\cdot 1 - 2\cdot 2) - (-2\cdot 1 - 2\cdot 1) + (-2\cdot 2 - (-1)\cdot 1)$

$= (-1 - 4) - (-2 - 2) + (-4 + 1)$

$= -5 + 4 - 3 = -4$

b) $m_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$, $m_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$, $m_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$m_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$m_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} (-5) & -(-1) & (3) \\ -(-4) & (0) & -(4) \\ (-3) & -(1) & (1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & -0{,}25 & -0{,}75 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0{,}75 & 0{,}25 & -0{,}25 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&0&0\\ -2&-1&2&0&1&0\\ 1&2&1&0&0&1\end{array}\right) \begin{matrix}\cdot 2 & \cdot(-1)\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&4&2&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&-1&-1&0\\0&1&4&2&1&0\\0&0&-4&-3&-1&1\end{array}\right) \cdot 1 \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5/4&-1/4&-3/4\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&3/4&1/4&-1/4\end{array}\right)$$

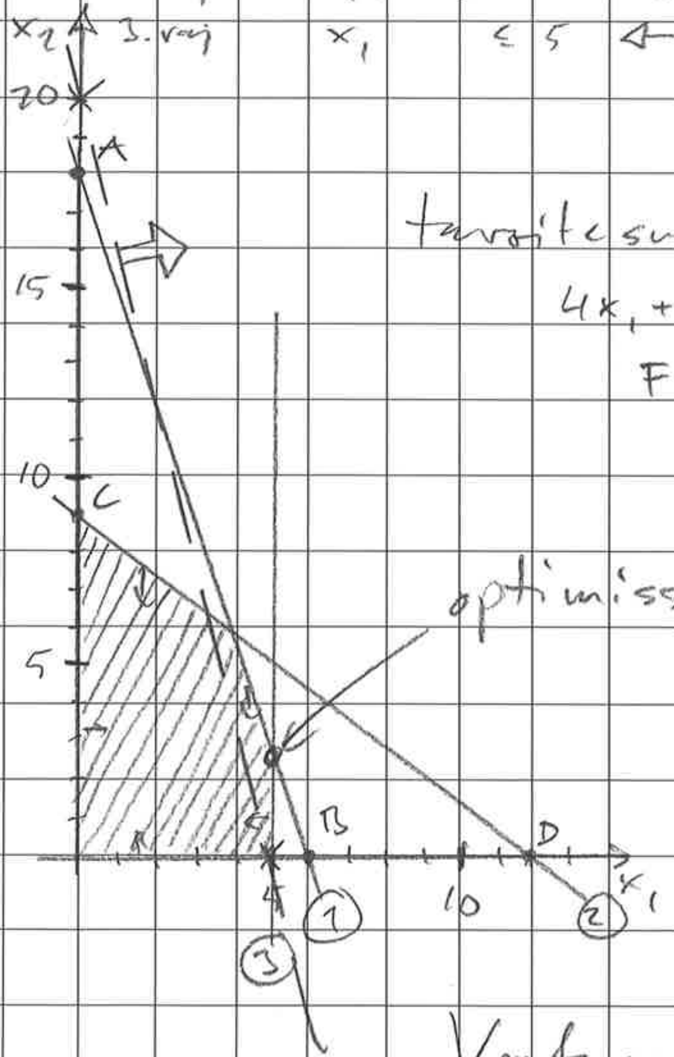
4. Ratkaise LP-malli

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{maksimoi} & 4x_1 & + & x_2 & & \\ \text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 36 \\ & & & x_1 & \leq & 5 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

1. raj. $3x_1 + x_2 \leq 18$ ↓ A: (0, 18) B: (6, 0)

2. raj. $3x_1 + 4x_2 \leq 36$ ↓ C: (0, 9) D: (12, 0)

3. raj $x_1 \leq 5$ ← E: (5, 0)



tavoitesuora

pisteessä (4, 4)

$4x_1 + x_2 = 20$

F: (0, 20), G: (5, 0)

optimissa $\begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 18 \\ x_1 = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$4x_1 + x_2 = 23$

Vastaus: optimissa päätösmuuttujien arvot ovat $x_1 = 5$ ja $x_2 = 3$, jolloin tavoitefunktio saa arvon $4 \cdot 5 + 3 = 23$