1. Lineaarinen optimointi

1.1 Johdatteleva esimerkki

Esimerkki 1.1.1 Giapetto's Woodcarving inc. valmistaa kahdenlaisia puuleluja: sotilaita ja junia. Sotilaan myyntihinta on 27€, ja siihen kuluu materiaalia 10€edestä. Jokainen valmistettu sotilas aiheuttaa lisäksi muuttuvia palkka- ja yleiskustannuksiakeskimäärin 14€edestä. Junan myyntihinta on 21€, ja siihen kuluu 9€edestä materiaalia. Muuttuvia palkka- ja yleiskustannuksia jokainen juna aiheuttaa keskimäärin 10€.
Sotilaiden ja junien valmistus tapahtuu kahdella osastolla: puutyöosastolla ja viimeistelyosastolla. Yksi sotilas vaatii 1 tunnin puutyötä ja 2 tuntia viimeistelyä. Vastaavasti yksi juna vaatii 1 tunnin puutyötä ja 1 tunnin viimeistelyä.
Yritys pystyy hankkimaan kaiken tarvitsemansa materiaalin, mutta puutyö- ja viimeistelyosastojen kapasiteetti on rajallinen. Käytettävissä on 80 tuntia puutyötä per viikko, ja 100 tuntia viimeistelytyötä per viikko. Lelujen kysynnästä tiedetään, että junien kysyntä on käytännössä rajoittamaton, mutta sotilaita saadaan kaupaksi korkeintaan 40 per viikko. Miten yritys voi maksimoida katetuottonsa? Muodostetaan ongelmasta LP-malli.

Päätösmuuttujat

Valitaan päätösmuuttujiksi muuttujat, jotka vaikuttavat katetuoton muodostumiseen ja joiden arvoon yritys kykenee vaikuttamaan. Yritys voi itse määrätä miten paljon sotilaita ja junia valmistetaan.

x_1: kpl sotilaita / viikko

x_2: kpl junia / viikko

Tavoitefunktio

Määritetään optimointitehtävässä tarvittava maksimoitava tai minimoitava tavoitefunktio. Yritys maksimoi katetuottoaan. Viikottainen katetuotto tulee esittää päätösmuuttujien x_1 ja x_2 funktiona.

myyntituotot / viikko	$27x_1$	$+$	$21x2$
materiaalikust. / viikko	$-10x_1$	$-$	$9x2$
palkka- ja yleiskust./viikko	$-14x_1$	$-$	$10x2$
katetuotto / viikko	$3x_1$	$+$	$2x2$

Yritys pyrkii maksimoimaan (lineaarista) funktiota:

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

Tavoitefunktion kertoimet kuvaavat ko. muuttujien kontribuutiota yrityksen katetuottoon.

Rajoitteet

Viimeistelytöihin on käytettävissä 100 h/vko. Puutöihin on käytettävissä 80 h/vko Sotilaita saadaan kaupaksi korkeintaan 40 kpl/vko. Siis

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 1x_2 & \leq & 100 \\ 1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 80 \\ 1x_1 & & & \leq & 40 \end{array}$$

Merkkirajoite

Sotilaita tai junia ei voida valmistaa negatiivisia määriä, joten

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2$$

LP-malli

$$\begin{array}{llrcrcl} \max & z = & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{ehdoin} & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\ & & x_1 & + & x_2 & \leq & 80 \\ & & x_1 & & & \leq & 40 \\ & & & & x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ratkaisemme mallin pian, mutta ensin toteamme joukon yleisiä asioita.

1.2 LP-mallin oletukset

LP-mallia rakennettaessa tehdään seuraavat oletukset. Oletukset tehdään, jotta malli olisi yksinkertainen. Jos oletukset johtavat liian paljon todellisuudesta poikkeavaan malliin, ei ongelmaa voida lähestyä LP-mallilla. Pieni ero todellisuuden ja mallin välillä ei yleensä haittaa.

1. **Suhteellisuusoletus:** jokaisen muuttujan x_i vaikutus tavoitefunktion arvoon ja rajoitettujen resurssien kulutukseen on suoraan verrannollinen ko. muuttujan arvoon.

2. **Additiivisuusoletus:** jokaisen muuttujan x_i vaikutus tavoitefunktion arvoon ja rajoitettujen resurssien kulutukseen on riippumaton muiden muuttujien x_j $(j \neq i)$ saamista arvoista.

3. **Jaollisuusoletus:** Muuttujat x_i voivat saada kokonaisluvuista poikkeavia arvoja.

4. **Varmuusoletus:** kaikki mallin parametrit tunnetaan varmuudella.

Oletukset 1 ja 2 johtavat siihen, että tavoitefunktio on lineaarinen ts.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

ja rajoitteet ovat lineaarisia yhtälöitä tai epäyhtälöitä

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j, j = 1, \ldots, m$$

Sanomme, että malli on Lp-malli, jos

a) tavoitefunktio on lineaarinen

b) rajoitteet ovat lineaarisia yhtälöitä tai epäyhtälöitä

c) $x_i \geq 0$ (kaikki muuttujat saavat vain ei-negatiivisia arvoja)

Muuttujien arvot muodostavat vektorin $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Usein (varsinkin kun $n = 2$) vektoria sanotaan pisteeksi. Vektori on ratkaisu (solution), jos se toteuttaa rajoitteet. Ratkaisu on käypä (kelpaava, feasible), jos se lisäksi toteuttaa ehdon $x_i \geq 0$ kaikilla i. Maksimointitehtävän (minimointitehtävän) optimiratkaisu on se käypä ratkaisu, jolla tavoitefunktio saa suurimman (pienimmän) arvonsa.

Esimerkiksi lelumallissa piste $(x_1, x_2) = (40, 20)$ on käypä ratkaisu koska se toteuttaa kaikki rajoitteet.

$$\begin{array}{rcrcl|l} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 100 & \text{sillä } 2 \cdot 40 + 20 = 100 \leq 100 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 80 & \text{sillä } 40 + 20 = 60 \leq 80 \\ x_1 & & & \leq & 40 & \\ & & x_i & \geq & 0 & \end{array}$$

Piste $(40, 20)$ ei kuitenkaan ole optimiratkaisu.

1.3 LP-mallin graafinen ratkaiseminen

Kun muuttujia on kaksi, saadaan ongelmasta havainnollinen esitys piirtämällä.

1. Piirretään koordinaatisto. Vaaka-akseli on x_1-akseli ja pystyakseli on x_2-akseli (katso kuvaa).
2. Piirretään rajoitteiden yhtälöitä vastaavat suorat koordinaatistoon.
3. Määritetään käypien ratkaisujen alue (feasible region).
4. Etsitään optimiratkaisu tutkimalla tavoitefunktion tasa-arvosuoria käypien ratkaisujen alueella.

Esimerkki 1.3.1 Tutkimme seuraavaksi puuleluesimerkkiä 1.1.1 graafisesti. Giapetto's Woodcarving inc. valmistaa puusotilaita (x_1 kpl/viikko) ja puujunia (x_2 kpl/viikko). Katteen optimointi rajoitteet huomioiden johtaa seuraavaan LP-malliin:

$$\begin{array}{llrcrcl} \max & z = & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{ehdoin} & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\ & & x_1 & + & x_2 & \leq & 80 \\ & & x_1 & & & \leq & 40 \\ & & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ennen koordinaatiston piirtämistä laskemme, missä rajoitteita vastaavat suorat leikkaavat koordinaattiakselit. Tämä auttaa meitä valitsemaan akselien mittakaavat järkevästi.

1. rajoite: $2x_1 + x_2 \leq 100$ käypä alue suoran alapuolella

$$\begin{array}{lrcll}
\text{suoran yhtälö:} & 2x_1 + x_2 & = & 100 & \\
 & \Leftrightarrow x_2 & = & -2x_1 + 100 & \text{(jyrkästi) laskeva suora} \\
 & & & & \\
\text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} & 2x_1 + 0 & = & 100 & \\
 & \Leftrightarrow x_1 & = & 50 & \longrightarrow A = (50, 0) \\
 & & & & \\
\text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} & 0 + x_2 & = & 100 & \\
 & \Leftrightarrow x_2 & = & 100 & \longrightarrow B = (0, 100)
\end{array}$$

2. rajoite: $x_1 + x_2 \leq 80$ käypä alue suoran alapuolella

$$\begin{array}{lrcll}
\text{suoran yhtälö:} & x_1 + x_2 & = & 80 & \\
 & \Leftrightarrow x_2 & = & -x_1 + 80 & \text{(loivasti) laskeva suora} \\
 & & & & \\
\text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste C)} & x_1 + 0 & = & 80 & \\
 & \Leftrightarrow x_1 & = & 80 & \longrightarrow C = (80, 0) \\
 & & & & \\
\text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste D)} & 0 + x_2 & = & 80 & \\
 & \Leftrightarrow x_2 & = & 80 & \longrightarrow D = (0, 80)
\end{array}$$

3. rajoite: $x_1 \leq 40$ käypä alue vasemmalla puolella

$$\begin{array}{lrcll}
\text{suoran yhtälö:} & x_1 & = & 40 & \text{pystysuora!} \\
 & & & & \longrightarrow E = (40, 0)
\end{array}$$

Seuraavaksi piirretään koordinaatisto ja rajoitesuorat.

$$\begin{array}{lrcll}
\textbf{Tavoitefunktio:} & 3x_1 + 2x_2 & = & z & \\
 & 2x_2 & = & -3x_1 + z & \\
 & x_2 & = & -1.5x_1 + 0.5z & \text{laskeva suora}
\end{array}$$

Siis ne ratkaisut joilla tavoitefunktio saa saman arvon (z) muodostavat laskevan suoran, jonka kulmakerroin on $-3/2$. Mitä suurempi on z, sitä ylempänä suora on.

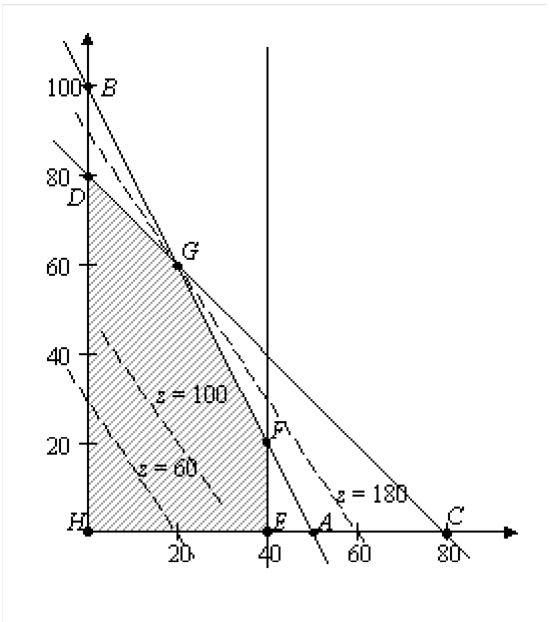

Figure 1.1: Leluesimerkin graafinen ratkaisu.

Kuvaan on piirretty z:n arvoja 60, 100 ja 180 vastaavat tasa-arvosuorat. Kuvasta näkee helposti, että ylin käypää aluetta koskettava tasa-arvosuora pisteessä G.

Optimi (G): 1. ja 2. rajoitesuoran leikkauspiste

$$\begin{cases} 2x1 + x2 &= 100 \\ x1 + x2 &= 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x1 &= 20 \\ x2 &= 60 \\ z &= 180 \end{cases}$$

1.3.1 Optimiratkaisun olemassaolo, esimerkkejä

Tarkastellaan puuleluesimerkin käyvän alueen sisäpistettä $(x_1 = 20, x_2 = 20)$. Mikään rajallisista resursseista (1. rajoite: "viimeistelytyöhön käytetty aika" , 2. rajoite: "puutöihin käytetty aika" ja 3. rajoite: "markkinoiden ostovoima") ei ole loppuunkäytetty. Kumpaakin muuttujaa (x_1 ja x_2) voidaan siis kasvattaa tai pienentää. Tavoitefunktion muodosta

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

näemme, että kasvattamalla hiukan muuttujan x_1 ja/tai muuttujan x_2 arvoa tavoitefunktio saa suuremman arvon. Piste $(20, 20)$ ei siis ole optimiratkaisu. Sama päättely voidaan toistaa mille tahansa käyvän alueen sisäpisteelle. Voimme siis päätellä seuraavasti.

Jos optimiratkaisu on olemassa, niin se on käyvän alueen reunapiste.

Edellisen puuleluesimerkkiin löytyi yksikäsitteinen optimiratkaisu käyvän alueen nurkkapisteestä. Tämä on hyvin yleinen, mutta ei ainoa mahdollinen, lopputulos.

Seuraavissa kolmessa esimerkissä käydään läpi muut mahdolliset tulokset. Esimerkeissä ei ole mitään taustakertomusta, vaan lähdemme suoraan valmiina annetuista lp-malleista.

Esimerkki 1.3.2 Etsi graafisesti optimiratkaisu LP-mallille

$$\begin{array}{llrcrcl} \text{min} & z = & -6x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{subject to} & & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 9 \\ & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & & x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ratkaisu: Huomaa, että kyseessä on minimointitehtävä. (Vertaa laskuja kuvaan .)

1. rajoite: $2x_1 + 4x_2 \leq 9$ käypä alue suoran alapuolella

$$\begin{array}{lrcll} \text{suoran yhtälö:} & 2x_1 + 4x_2 & = & 9 & \\ & 4x_2 & = & -2x_1 + 9 & \\ & x_2 & = & -0.5x_1 + 2.5 & \text{(loivasti) laskeva suora} \\ & & & & \\ \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} & 2x_1 + 0 & = & 9 & \\ & \Leftrightarrow x_1 & = & 4.5 & \longrightarrow A = (4.5, 0) \\ & & & & \\ \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} & 0 + 4x_2 & = & 9 & \\ & \Leftrightarrow x_2 & = & 2.25 & \longrightarrow B = (0, 2.25) \end{array}$$

2. rajoite: $3x_1 + x_2 \leq 6$ käypä alue suoran alapuolella

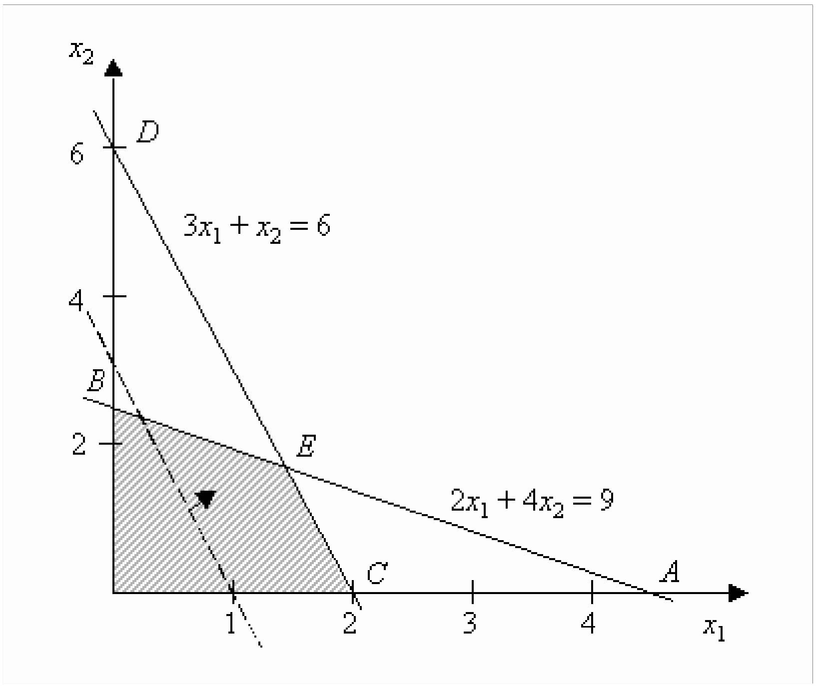

Figure 1.2: Esimerkin 1.3.2 graafinen ratkaisu.

suoran yhtälö:	$3x_1 + x_2$	$=$	6	
	x_2	$=$	$-3x_1 + 6$	(jyrkästi) laskeva suora
jos $x_2 = 0$ (piste C)	$3x_1 + 0$	$=$	6	
	$\Leftrightarrow x_1$	$=$	2	$\longrightarrow C = (2, 0)$
jos $x_1 = 0$ (piste D)	$0 + x_2$	$=$	6	
	$\Leftrightarrow x_2$	$=$	6	$\longrightarrow D = (0, 6)$
Tavoitefunktio:	z	$=$	$-6x_1 - 2x_2$	
	$\Leftrightarrow 2x_2$	$=$	$-6x_1 - z$	
	$\Leftrightarrow x_2$	$=$	$-3x_1 - 0.5z$	laskeva suora

z pienenee, eli tavoitefunktion arvo paranee, kun x_1 tai x_2 kasvavat. z siis pienenee, kun tasa-arvosuora siirtyy oikealle ja ylöspäin. Koska tasa-arvosuora ja 2. rajoitesuora ovat yhdensuuntaiset (samat kulmakertoimet), ovat kaikki janan CE pisteet optimiratkaisuja (katso kuva). Tavoitefunktion optimiarvo on kaikissa näissä pisteissä sama

$$z(C) = -6x_1(C) - 2x_2(C) = -6 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = -12$$

Pisteen E koordinaatit saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1.5 \\ x_2 & = & 1.5 \end{array} \right.$$

Optimiratkaisu saadaan siis, kun $1.5 \leq x_1 \leq 2$ ja $x_2 = 6 - 3x_1$. Optimiratkaisuja on siis useita, mutta tavoitefunktion optimiarvo on yksikäsitteinen, $z_{\text{min}} = -12$.

Esimerkki 1.3.3 *Etsi graafisesti optimiratkaisu LP-mallille*

$$
\begin{array}{llcccc}
\text{max} & z = & x_1 & + & x_2 & \\
\text{subject to} & & x_1 & - & x_2 & \geq & 1 \\
 & & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ratkaisu: Huomaa, että kyseessä on maksimointitehtävä. (Vertaa laskuja kuvaan .)

1. rajoite: $x_1 - x_2 \geq 1$ käypä alue on suoran alapuolella

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{suoran yhtälö:} & x_1 - x_2 & = & 1 & \\
 & -x_2 & = & -x_1 + 1 & \\
 & x_2 & = & x_1 - 1 & \text{nouseva suora} \\
 & & & & \\
\text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} & x_1 + 0 & = & 1 & \\
 & \Leftrightarrow x_1 & = & 1 & \longrightarrow A = (1, 0) \\
 & & & & \\
\text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} & 0 - x_2 & = & 1 & \\
 & \Leftrightarrow x_2 & = & \text{-1} & \longrightarrow B = (0, -1) \\
 & & & & B \text{ ei siis ole käypä!!}
\end{array}
$$

2. rajoite: $x_2 \leq 2$ käypä alue vaakasuoran alapuolella

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{suoran yhtälö:} & x_2 & = & 2 & \text{vaakasuora} \\
 & & & & \\
\text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste C)} & 0 + x_2 & = & 2 & \\
 & \Leftrightarrow x_2 & = & 2 & \longrightarrow C = (0, 2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Tavoitefunktio:} & z & = & x_1 + x_2 & \\
 & \Leftrightarrow x_2 & = & -x_1 + z & \text{laskeva suora}
\end{array}
$$

Optimiratkaisu: Tavoitefunktion arvo paranee (z kasvaa), kun x_1 tai x_2 kasvavat, eli tasa-arvosuora siirtyy oikealle ja ylöspäin. Koska muuttujaa x_1 voidaan kasvattaa rajatta, voidaan myös tavoitefunktion arvoa kasvattaa rajatta, eikä optimiratkaisua siis ole olemassa. Se, että mikään rajallinen resurssi ei rajoita muuttujan x1 arvoa, on poikkeuksellista. Mahdollisesti lp-malli on väärin muodostettu.

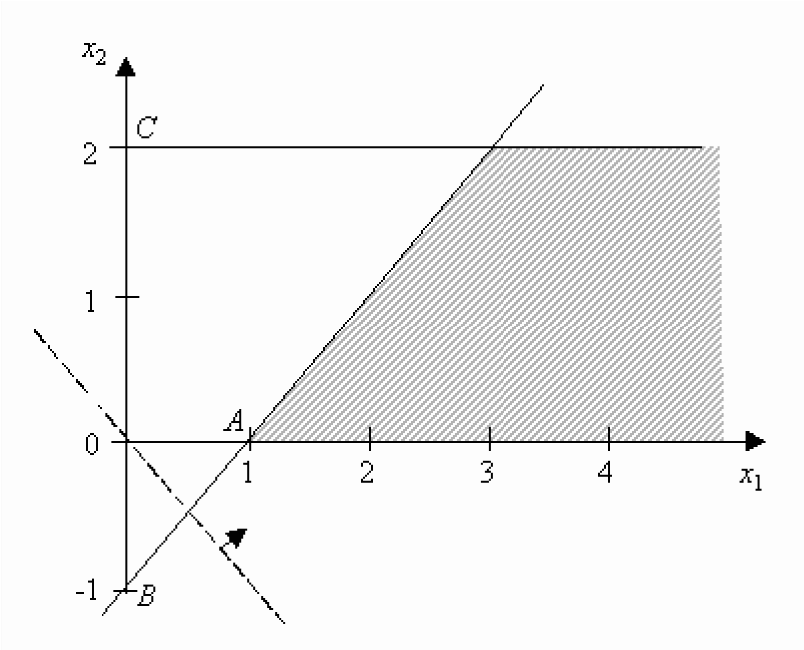

Figure 1.3: Esimerkin graafinen ratkaisu.

Esimerkki 1.3.4 *Etsi graafisesti optimiratkaisu LP-mallille*

$$\begin{array}{llrcrcl} \text{min} & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{subject to} & & x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\ & & 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ & & & & x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ratkaisu: (Vertaa laskuja kuvaan.)

1. rajoite: $x_1 + x_2 \geq 10$ käypä alue on suoran yläpuolella

$$\begin{array}{lrcll} \text{suoran yhtälö:} & x_1 + x_2 & = & 10 & \\ & x_2 & = & -x_1 + 10 & \text{laskeva suora} \\ & & & & \\ \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} & x_1 + 0 & = & 10 & \\ & \Leftrightarrow x_1 & = & 10 & \longrightarrow A = (10, 0) \\ & & & & \\ \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} & 0 + x_2 & = & 10 & \\ & \Leftrightarrow x_2 & = & 10 & \longrightarrow B = (0, 10) \end{array}$$

2. rajoite: $3x_1 + 5x_2 \leq 15$ käypä alue suoran alapuolella

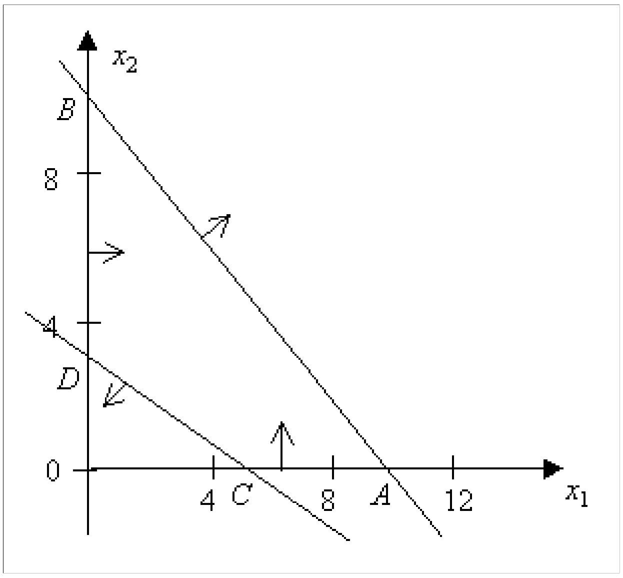

Figure 1.4: Esimerkin graafinen ratkaisu.

$$\begin{array}{llrcll}
\text{suoran yhtälö:} & & 3x_1 + 5x_2 & = & 15 & \\
& & 5x_2 & = & -3x_1 + 15 & \\
& & x_2 & = & -0.6x_1 + 3 & \\
\quad\text{laskeva suora} & & & & & \\
& & & & & \\
\text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste C)} & & 3x_1 + 0 & = & 15 & \\
& & \Leftrightarrow x_1 & = & 5 & \longrightarrow C = (5, 0) \\
& & & & & \\
\text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste D)} & & 0 + 5x_2 & = & 15 & \\
& & \Leftrightarrow x_2 & = & 3 & \longrightarrow D = (0, 3)
\end{array}$$

Kun rajoitesuorat piirretään koordinaatistoon nähdään, että käypä alue on tyhjä. Rajoitteet ovat ristiriitaiset, eikä ongelmalle ole olemassa ratkaisua.

Edellisten esimerkkien perusteella voimme yleistää, että on neljä perustapausta:

1. **LP-mallilla on yksikäsitteinen optimiratkaisu.**

   ⋆ Optimiratkaisu on käyvän alueen nurkkapiste.

2. **LP-mallilla on useita optimiratkaisuja.**

   ⋆ Optimiratkaisu on käyvän alueen reunan osa.

   ⋆ Tavoitefunktio saa kaikissa optimipisteissä saman arvon. Tavoitefunktion optimiarvo on siis yksikäsitteinen.

3. **LP-mallilla on rajoittamaton optimi.**

   ⋆ Tavoitefunktion arvo saadaan miten hyväksi tahansa.

   ⋆ Mallilla on ratkaisuja, mutta ei optimiratkaisua.

4. **LP-mallilla ei ole ratkaisuja.**

   ⋆ Käypä alue on tyhjä. (Eli ratkaisujoukko on tyhjä.)

   ⋆ Rajoitteet ovat ristiriitaiset.