Vaasan yliopisto, 2004

Talousmatematiikan perusteet, TMA.003 / ORMS.1030

Uusintakoe **26.10.2005**

Korjaaja: Matti Laaksonen (Matemaattisten tieteiden laitos)

Ratkaise 4 tehtävää! Kokeessa on aikaa 3 tuntia.

Mukana saa olla taskulaskin ja matemaattiset taulukot! Kun käsittelet tehtävän, ratkaise kaikki sen alakohdat (a,b,c,...)!

`Jos suoritat kurssia uuden tutkintorakenteen mukaan, merkitse vastauspaperiisi kurssikoodiksi ORMS1030, jos opiskelet aikaisemman ops:in mukaan merkitse koodiksi TMA003 (oletusarvo, jos et merkitse koodia itse, on TMA003).`

1. a) Mikä on 8,5% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta?
b) Määritä tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 12 000 euroa, laina-aika on 4 vuotta, lainaa lyhennetään kuukausittain, ja todellinen vuosikorko on 8,5%.

Ratkaisu: a) Kuukausikorko i ja todellinen vuosikorko i_{eff} liittyvät toisiinsa kaavalla: $1 + i_{eff} = (1 + i)^{12}$, joten $i = (1 + i_{eff})^{1/12} - 1$. Nyt siis

$$i = 1.085^{1/12} - 1 = 0.0068215$$

b) Lainan määrä $K = 12\,000$ (€), laina-aika $n = 48$ (kuukautta), joten

$$\begin{aligned} k = c_{n,i}K &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot K \\ &= \frac{(1.085^{1/12} - 1)1.085^4}{1.085^4 - 1} \cdot 12\,000 = 294.00 \text{ €} \end{aligned}$$

Vastaus: *a)* $i = 0.006815$ *b) annuiteetti on* $294,00$ *€*
*(Huom. jos a-kohdan vastaus ilmoitetaan epätarkasti (*0.007 *tms.), niin korkokanta on* 3*% liian iso. Näin isoa virhettä ei sallita.)*

---

2. Vuodessa raaka-ainevaraston läpi kulkee kappaletavaraa $D = 1600$ kpl. Tilauskustannus on 9 € /erä ja varaston ylläpitokustannus on 1.5 € /(kuukausi·kpl).

a) Mikä on optimaalinen tilauserän koko, ja miten suuret ovat varastosysteemin vuotuiset kokonaiskustannukset ?

b) Raaka-aineen yksikköhinta on 5 € /kpl. Raaka-aineen toimittaja tarjoaa määräalennusta, joka on 1% ostohinnasta, kun tilauserä on vähintään 50 kappaletta, ja 3% ostohinnasta, kun tilauserä on vähintään 100 kappaletta. Mikä on nyt optimaalinen tilauserä?

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned}
D &= 1600 \text{ kpl/vuosi} \\
K &= 9 \text{ €} \\
h &= 1.5 \, \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kuukausi}} = 18 \, \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \\
q &= \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \text{ €} \cdot 1\,600 \,\text{kpl/vuosi}}{18 \text{ €} /(\text{kpl} \cdot \text{vuosi})}} = 40 \text{ kpl} \\
TC &= \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2} \\
&= \frac{9 \text{ €} \cdot 1600 \,\text{kpl/vuosi}}{40 \,\text{kpl}} + 18 \, \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{40 \,\text{kpl}}{2} = 720 \, \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}
\end{aligned}$$

b) Vuotuinen raaka-aineen sisäänostokustannus on

$$5 \, \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot 1\,600 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}} = 8\,000 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

Optimaalinen tilauserä on nyt joko a-kohdan mukainen $q_0 = 40 \,\text{kpl}$ tai $q_1 = 50 \,\text{kpl}$ (alempi määräalennusraja) tai $q_2 = 100 \,\text{kpl}$ (ylempi määräalennusraja). Lasketaan kaikissa tapauksissa vuotuinen varastonpidon kokonaiskustannus - alennus, eli

$$TC(q) - \text{alennus} = \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2} - \text{alennus}$$

$$\begin{aligned}
TC(40) - \text{alennus} &= \frac{9 \cdot 1600}{40} + 18 \cdot \frac{40}{2} - 0 = 720 \,(\text{€ /vuosi}) \\
TC(50) - \text{alennus} &= \frac{9 \cdot 1600}{50} + 18 \cdot \frac{50}{2} - 0,01 \cdot 8000 = 658 \,(\text{€ /vuosi}) \\
TC(100) - \text{alennus} &= \frac{9 \cdot 1600}{100} + 18 \cdot \frac{100}{2} - 0,03 \cdot 8000 = 804 \,(\text{€ /vuosi})
\end{aligned}$$

Optimaalinen tilauserän koko on siis 50 kpl.

Vastaus: *a) Optimaalinen tilauserän koko on* 40 *kpl ja kokonaiskustannus on silloin* 720 € */vuosi.*
b) Optimaalinen tilauserä on 50 *kpl.*

---

3. Yrityksen kysyntäfunktio on $p = 74 - 0.1q$. Rajakustannus on $MC(q) = 50 + 0.2q$. a) Millä tuotannon q arvolla yritys maksimoi voittonsa. b) Mikä on voitto, jos kiinteät kustannukset ovat $FC = 100$?

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned} p = 74 - 0.1q \quad \rightarrow \quad R = p \cdot q &= 74q - 0.1q^2 \\ MR &= 74 - 0.2q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MC = MR \quad \Leftrightarrow \quad 50 + 0.2q &= 74 - 0.2q \\ 0.4q &= 24 \\ q &= 60 \end{aligned}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} MC &= 50 + 0.2q \\ FC &= 100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = 50q + 0.1q^2 + 100$$

$$\begin{aligned} P(q) &= R(q) - C(q) = (74q - 0.1q^2) - (50q + 0.1q^2 + 100) \\ &= 24q - 0.2q^2 - 100 \\ \Rightarrow P(60) &= 24 \cdot 60 - 0.2 \cdot 60^2 - 100 = 620 \end{aligned}$$

Vastaus: *a) Yritys maksimoi voittonsa, kun tuotantomäärä on* $q = 60$.
b) Voitto on silloin 620.

---

4. a) Mitä tarkoittaa y:n jousto x:n suhteen.
b) Tuotteen kysyntä oli kesäkuussa 300 tuotetta ja hinta oli 21.50 € /tuote. Heinäkuussa hinta oli 23.00 € /tuote ja kysyntä oli 273 tuotetta. Mikä oli kysynnän hintajousto.

Ratkaisu: a) y:n jousto x:n suhteen on y:n suhteellisen muutoksen (%-muutoksen) suhde x:n suhteelliseen muutokseen (%-muutokseen). Kaavana

$$\text{jousto} = \frac{y\text{:n %-muutos}}{x\text{:n %-muutos}} = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

b)

$$\text{kysynnän hintajousto} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{-27}{1.5} \cdot \frac{21.50}{300} \approx -1.29$$

Vastaus: *a) Katso selitys yllä. b) kysynnän hintajousto* $= -1.29$.

---

5. a) Määritä matriisin $\mathbf{A}$ a) determinantti ja b) käänteismatriisi sekä c) ratkaise yhtälöryhmä $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}^T$, kun

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} &= 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 5(-2-0) - 0 + 3(4-0) \\ &= -10 - 0 + 12 \\ &= 2 \end{aligned}$$

b)

$\lvert A_{11}\rvert = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2$	$\lvert A_{12}\rvert = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$	$\lvert A_{13}\rvert = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$
$\lvert A_{21}\rvert = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6$	$\lvert A_{22}\rvert = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$	$\lvert A_{23}\rvert = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -10$
$\lvert A_{31}\rvert = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6$	$\lvert A_{32}\rvert = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6$	$\lvert A_{33}\rvert = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -10$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ (-2) & 5 & -6 \\ 4 & -(-10) & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 2.5 & -3 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \leftarrow \\ +2 \\ \end{array} &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} +2 \\ \leftarrow \\ \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & -10 & 6 & -12 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \leftarrow \\ -5 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{cases}
x \quad -4y \quad +3z \quad = \quad -5 & \qquad\qquad\qquad\qquad \rightarrow x = 1 \\
\quad -2y \quad +z \quad = \quad -2 & \qquad\qquad \rightarrow y = 0 \\
\qquad\qquad\qquad = \quad -2 & \rightarrow z = -2
\end{cases}
$$

Vastaus: *a) 2*
b)

$$
\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 2.5 & -3 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}
$$

c) $x = 1$, $y = 0$,$z = -2$

Varastomalleista

$$\text{perusmalli} \quad q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

$$\text{puutemalli} \quad q_1 = q_0\sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0\sqrt{\frac{s}{h+s}},$$

$$TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$$

$$\text{tuotantomalli} \quad q_2 = q_0\sqrt{\frac{r}{r-D}}, \quad M_2 = q_0\sqrt{\frac{r-D}{r}},$$

$$TC_2(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq(r-D)}{2r}$$

Korkolasku

$$K_t = K_0(1+it) = K_0(1+\frac{p}{100}t), \text{ kun } 0 < t < 1$$

$$K_t = K_0(1+i)^t$$

$$K_t = K_0 e^{\rho t}, \text{ missä } 1+i = e^{\rho}$$

Jaksolliset suoritukset

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \qquad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Matriisikaavoja
$(n \times n)$ neliöatriisille $\mathbf{A} = (a_{ij})$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

missä $\det(\mathbf{A}_{rs})$ on alkioon a_{rs} liittyvä minori

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = (\alpha_{ij})$$

missä $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ji})$ on alkioon a_{ji} liittyvä kofaktori

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{adj}(\mathbf{A})$$

Cramerin kaavat:

$$x_j = D_j/D$$