

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

## Aiheet

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

Matriisi on suorakulmainen lukukaavio. Matriiseja ovat esimerkiksi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, (1 \quad -4 \quad 2), \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- ▶ Kaavio kirjoitetaan kaarisulkujen väliin (amer. kirjoissa usein hakasulkujen väliin.)
- ▶ Luvut tulee kirjoittaa selkeästi riveihin ja sarakkeisiin.
- ▶ Lukujen väliin tulee jättää riittävästi väliä. Mitään erottimia (pilkku, tms.) ei lukujen väliin laiteta.

## Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosiMatriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminen

Jos kaaviossa on  $m$  riviä ja  $n$  saraketta, niin sanomme kaaviota  $m \times n$ -matriisiksi.

- ▶ Edellä matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

on  $2 \times 3$  -matriisi.

- ▶ Matriisi

$$v = \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

on  $2 \times 1$  -matriisi, eli saraktevektori.

#### Aiheet

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

- ▶ Matriisi

$$\mathbf{u} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

on  $1 \times 4$  -matriisi, eli **rivivektori**.

- ▶ Matriiseille kannattaa laskiessa lähes aina antaa nimi.
  - ▶ Matriisin nimi kirjoitetaan kirjaimella, joka on iso, lihava ja vino. (Esim. ***A***)
  - ▶ Vektorin nimi kirjoitetaan kirjaimella, joka on pieni, lihava ja vino (tai pieni, normaali, ja vino ja sen päällä on nuoli tai viiva). (Esim. ***u*** =  $\vec{u}$ )
- ▶ Käsien kirjoitettaessa lihavointi ja vinous jätetään pois.

## Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosiMatriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminen

Matriisin  $A$  rivillä  $r$  sarakkeessa  $c$  olevaa lukua merkitsemme  $a_{rc}$ . Vektorin tapauksessa yksi indeksi riittää.

Esimerkki:

$$\text{Jos } M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \text{ niin } m_{23} = 7$$
$$\text{jos } \mathbf{v} = (4 \ 5 \ 7 \ 1), \text{ niin } v_3 = 7$$

- ▶ Jos tulkintaongelmia ei tule, niin merkinnän  $m_{23}$  rivi-indeksin 2 ja sarake-indeksin 3 väliin ei lisätä erotinta.
- ▶ Joskus erotin on tarpeen. Esimerkiksi  $30 \times 30$  -matriisin  $Q$  alkio rivillä 12 sarakkeessa 3 on  $q_{12,3}$ .

#### Aiheet

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin kääntematriisi

Kääntematriisin määrittäminen

Matriisin **(pää)lävistäjä** (diagonaali) muodostuu niistä luvuista, joiden rivi-osoite ja sarake-osoite ovat samat. Matriisin **A** lävistäjällä ovat siis luvut  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 0 \\ 2 & \mathbf{1} & 5 \\ -2 & 4 & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

Matriisi on **neliömatriisi** ( $n \times n$ ), jos siinä on sarakkeita yhtä monta kuin rivejä.

## Aiheet

Määritelmiä ja  
merkkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosiMatriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminen

**Nollamatriisi**  $\mathbf{0}$  on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia. Nollamatriisin ei tarvitse olla neliömatriisi.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Yksikkömatriisi**  $I$  on neliömatriisi, jonka lävistäjällä on ykkösiä ja muualla nollia

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Aiheet

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

$m \times n$  -matriisi  $\mathbf{A}$  ja  $p \times q$  -matriisi  $\mathbf{B}$  ovat samat (identtiset) ja merkitsemme  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ , jos

1. Kummassakin on yhtä monta riviä eli  $m = p$ , ja
2. Kummassakin on yhtä monta saraketta eli  $n = q$ , ja
3. Niissä on samat luvut samoissa paikoissa

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

Esimerkki: Jos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

niin  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ , mutta  $\mathbf{A} \neq \mathbf{C}$ .

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosi

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

Kahden saman kokoisen matriisin summa lasketaan niin, että samassa paikassa olevat luvut lasketaan yhteen ja tulos sijoitetaan samaan paikkaan.

Jos  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , niin  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

Matriisi kerrotaan luvulla siten, että jokainen matriisin luku erikseen kerrotaan.

Jos  $\mathbf{C} = r \cdot \mathbf{A}$ , niin  $c_{ij} = r \cdot a_{ij}, \forall i, j$

Esimerkki

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 0 & 10 \\ 5 & -20 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosi

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

Edellä tehdyistä määritelmistä seuraa, että



$$\mathbf{A} + \mathbf{A} = 2\mathbf{A}$$



$$r\mathbf{A} + q\mathbf{A} = (r + q)\mathbf{A}$$



$$-\mathbf{A} = (-1) \cdot \mathbf{A}$$



$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosi

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

Kahden vektorin pistetulo saadaan periaatteella: Laske ensimmäisten koordinaattien tulo + toisten koordinaattien tulo + ... + viimeisten koordinaattien tulo.

Eli kaavalla

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{j=1}^n u_j v_j$$

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 5 \cdot (-2) = -6$$

Aiheet

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

$m \times p$ -matriisin  $A$  ja  $p \times n$ -matriisin  $B$  tulo on  $m \times n$ -matriisi  $C$  jonka alkio  $c_{ij}$  rivillä  $i$  sarakkeessa  $j$  saadaan laskemalla  $A$ :n  $i$ :nnen rivin ja  $B$ :n  $j$ :nnen sarakkeen pistetulo.

$$(AB)_{ij} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ip}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosiMatriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosiMatriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminen

Siis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}: 2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}: 3 \times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{AB}: 2 \times 4}$$

Huomaa, että

- ▶ Jotta kertolasku  $\mathbf{AB}$  onnistuu tulee  $\mathbf{A}$ :n rivin olla yhtä pitkä kuin  $\mathbf{B}$ :n sarake on korkea.
- ▶ Tulossa  $\mathbf{AB}$  on yhtä monta riviä kuin matriisissa  $\mathbf{A}$  ja yhtä monta saraketta kuin matriisissa  $\mathbf{B}$ .

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosiMatriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminen

Matriisien yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen noudattavat seuraavia lakeja. Olkoon  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{C}$   $m \times n$ -matriiseja ja  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Silloin

$$(1) \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

$$(2) \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$(3) \quad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

$$(4) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(5) \quad 1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$(6) \quad \alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$$

$$(7) \quad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$$

$$(8) \quad \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$$

Aiheet

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

Olkoon  $A$ ,  $B$  ja  $C$  matriiseja ja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin

$$(1) \quad A(BC) = (AB)C$$

$$(2) \quad A(B + C) = AB + AC$$

$$(3) \quad (A + B)C = AC + BC$$

$$(4) \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

$$(5) \quad IA = AI = A$$

Edellä olleet kaavat merkitsevät sitä, että matriisilausekkeita voi käsitellä hyvin samaan tapaan kuin koulussa on käsitelty  $x:n$  lausekkeita.

Kun pitää seuraavat kolme matriisilaskennan erityispiirrettä valppaasti mielessään, niin matriiseilla voi laskea kuten  $x:n$  lausekkeilla

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosiMatriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminen

Olkoon  $A$ ,  $B$  ja  $C$  matriiseja. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin on mahdollista että

$$(1) \quad AB \neq BA$$

$$(2) \quad AC = BC, \text{ vaikka } A \neq B$$

$$(3) \quad AB = 0, \text{ vaikka } (A \neq 0 \text{ ja } B \neq 0)$$

Kommentteja:

- (1) Kertolaskussa ei saa vaihtaa tekijöiden järjestystä.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosi

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

(1)  $AB \neq BA$ , (2)  $(AC = BC) \not\Rightarrow (A = B)$

- ▶ (1) "Järjestys ei vaihdu!" Periaate näkyy kaavoissa. Jos  $A$  on vasemmalla LHS:ssa, niin se on vasemmalla myös RHS:ssa. Esim

$$A(B + C) = AB + AC$$

- ▶ (2) "Matriisilla ei saa jakaa!" Kun koulussa on käsitelty  $x$ :n lausekkeita, on totuttu jakamaan LHS:n ja RHS:n yhteinen tekijä pois yhtälöstä. Matriisi-yhtälön kohdalla näin ei saa tehdä.

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkitöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosi

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

(3)  $(\mathbf{AC} = \mathbf{0}) \not\Rightarrow (\mathbf{A} = \mathbf{0}$  tai  $\mathbf{B} = \mathbf{0})$

- ▶ (3) "Tulon nollasääntö ei ole voimassa!"
- ▶ Esimerkiksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ On totta, että matriiseissa on jotakin erikoista, kun niiden tulo on nollamatriisi, mutta se erikoinen seikka ei ole se, että toinen niistä olisi nollamatriisi.

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosi

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

**Määritelmä:**  $m \times n$  -matriisin  $\mathbf{A}$  **transponoitu matriisi** eli **transpoosi** (engl. transpose)  $\mathbf{A}^T$  on  $n \times m$  -matriisi, jolle

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Transpoosi  $\mathbf{A}^T$  saadaan siis  $\mathbf{A}$ :sta tekemällä riveistä sarakkeita.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 9 \\ 5 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(Huomaa, että lävistäjä pysyy paikallaan.)

Aiheet

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

Transpoosille on voimassa seuraavat kaavat

$$(1) \quad (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(2) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(3) \quad (\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T$$

$$(4) \quad (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad \text{huomaa järjestys!}$$

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosi

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

Esimerkki Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Nyt

$$(\mathbf{AB})^T = \left( \left( \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right) \right)^T = \begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 2 & -4 \\ -3 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 2 & -4 \\ -3 & 30 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosi

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

Reaalilukujen tapauksessa luvun  $a \neq 0$  käänteisluku  $1/a = a^{-1}$  on sellainen luku, että

$$a^{-1} \cdot a = 1 \quad \text{ja} \quad a \cdot a^{-1} = 1$$

(missä  $1 =$  kertolaskun neutraalialkio).

Matriisin käänteismatriisilta vaaditaan täsmälleen sama ominaisuus. Asioita mutkistaa se, että kaikilla  $\mathbf{0}$ :sta poikkeavilla matriiseilla ei ole käänteismatriisiä.

**Määritelmä:** Neliömatriisi  $\mathbf{A}$  on **säännöllinen**, jos on olemassa **käänteismatriisi**  $\mathbf{A}^{-1}$  siten, että

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{ja} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Aiheet

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

## Esimerkki

$$\text{Jos } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ niin } \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix},$$

sillä

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosiMatriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminen

Yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisiyhtälöksi

$$\begin{cases} 2x - 1y - 2z = 7 \\ \phantom{2x} + 2y + z = -8 \\ -1x + 4y + 3z = -17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{Q}\vec{x} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \mathbf{Q}^{-1}\vec{b}$$

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosiMatriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminen

Esimerkki jatkuu

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x - 1y - 2z = 7 \\ \phantom{2x} + 2y + z = -8 \\ -1x + 4y + 3z = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{Q}\vec{x} = \vec{b}$$

ratkaisu on siis

$$\vec{x} = \mathbf{Q}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kaksi kysymystä:

- ▶ (1) Mistä tietää onko kerroinkaavio säännöllinen?
- ▶ (2) Mistä saadaan käänteismatriisi?

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosiMatriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminen

Ensimmäinen vastaus kysymykseen (2) on seuraavassa.  
(Perustelu luennolla)

Matriisin  $A$  käänteismatriisin määrittäminen:

- ▶ (1) Muodosta kaksiosainen leveä kaavio

$$(A|I)$$

jonka vasen osa on käännettävä matriisi ja oikea puoli on saman kokoinen yksikkömatriisi.

- ▶ (2) Tee kaaviolle rivioperaatioita niin, että vasen puoli muuttuu yksikkömatriisiksi.
- ▶ (3) Kun vasen puoli on yksikkömatriisi, niin oikea puoli on  $A^{-1}$ .
- ▶ (\*) (Jos vaihetta (3) ei voi saavuttaa, niin matriisi ei ole säännöllinen.)

Aiheet

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ vaihda rivit 1 ja 3} \\
 \sim & \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \end{array} \right| \cdot (-1) \\
 \sim & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} + \\ \cdot 2 \\ - \end{array} \right| \cdot 3.5 \quad \cdot 0.5 \\
 \sim & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & -3.5 & 2 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} + \\ - \\ \cdot 1 \end{array} \right| \cdot 2
 \end{aligned}$$

Esimerkki jatkuu

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0.5} & 1 & -3.5 & 2 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} - \\ + \\ \cdot 2 \end{array} \right|$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 4 \end{array} \right)$$

Aiheet

Määritelmiä ja  
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin  
transpoosiMatriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminen