

# Derivointikaavoja, interpolointi, jousto, rajatuotto, L4b

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

### Potenssifunktio:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

Eksponentin  $n$  ei tarvitse olla kokonaisluku, vaan se voi olla murtoluku tai desimaaliluku!

### Neliöjuuri:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{ax} = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}x^{1/2}) = \dots$$

Palutui edeltävään kaavaan (EI OMAA KAAVAA)

### Eksponttifunktio:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}e^{ax} = a \cdot e^{ax}$$

$$\left( \frac{d}{dx} a^x = \ln(a) \cdot e^x \right)$$

### Logaritmifunktio:

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \ln(ax) = \frac{1}{x}$$

$$\left( \frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \right)$$

## Tulon derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Eli lyhyesti

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

## Osamäärän derivaatta:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Eli lyhyesti

$$\left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

## Yhdistetyn funktion derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esimerkki 1: Olkoon  $e^{5x} = g(f(x))$ , missä

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x &\longrightarrow & f'(x) = 5 \\ g(z) &= e^z &\longrightarrow & g'(z) = e^z \end{aligned}$$

Silloin

$$\frac{d}{dx}(e^{5x}) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{5x} \cdot 5$$

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esimerkki 2: Olkoon  $(5 + x^2)^3 = g(f(x))$ , missä

$$f(x) = 5 + x^2 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 2x$$

$$g(z) = z^3 \quad \longrightarrow \quad g'(z) = 3z^2$$

Silloin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}((5 + x^2)^3) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3(f(x))^2 \cdot f'(x) \\ &= 3(5 + x^2)^2 \cdot 2x = 6x(5 + x^2)^2 \end{aligned}$$

# Derivointikaavoja

## Ketjusääntö

Aiheet

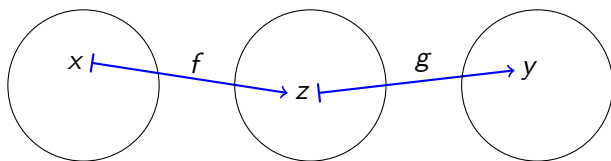
Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

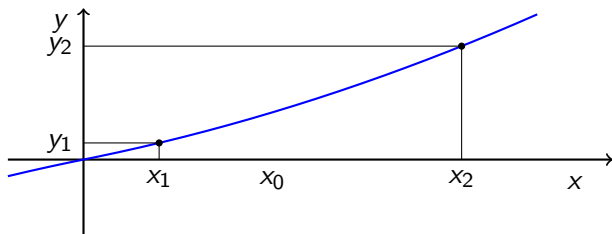
$$y = g(z) = g(f(x))$$



$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(g(f(x))) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= g'(z) \cdot f'(x) = g'(f(x))f'(x)\end{aligned}$$

# Interpolointi

Olkoon  $y = f(x)$  funktio, jonka kuvaaja on "melkein suora". Tiedämme funktion  $f$  arvot kahdessa kohdassa:  $y_1 = f(x_1)$  ja  $y_2 = f(x_2)$ . Haluamme arvioida (estimoida) funktion arvoa kohdassa  $x_0$ , joka on kohtien  $x_1$  ja  $x_2$  välissä.



Aiheet

Derivointikaavoja

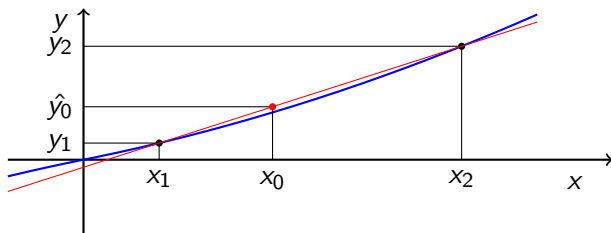
Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

# Interpolointi

Piirretään suora pisteiden  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  kautta ja luetaan arvio suoralta



$$\frac{\hat{y}_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_0) \approx \hat{y}_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1)$$

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

$$f(x_0) \approx \hat{y}_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1)$$

- ▶ Jos  $x_1 < x_0 < x_2$ , niin kaavan soveltamista sanotaan **interpoloinniksi**.
- ▶ Jos  $x_0$  ei ole kohtien  $x_1$  ja  $x_2$  välissä (eli  $x_0 < x_1 < x_2$  tai  $x_1 < x_2 < x_0$ ), niin kaavan soveltamista sanotaan **ekstrapoloinniksi**.
- ▶ Kaava on sama.
- ▶ Ekstrapoloinnissa syntyvä virhe saattaa olla suuri!

# Interpolointi

## Lineaarinen kysyntäfunktio

Se hinta  $p$ , jolla tuotteen koko tuotanto saadaan myytyä, riippuu tuotteen tarjotusta määrästä  $q$ . Kysyntäfunktion  $p = f(q)$  lauseketta ei tunneta, eikä se ole pysyvänä edes olemassa. Jos tiedämme vastaavat arvot kahdessa nykyhetkeen verrattavassa tilanteessa  $(q_1, p_1)$  ja  $(q_2, p_2)$ , niin voimme estimoida kysyntäfunktiota seuraavasti.

Olkoon tunnetut arvot  $(q_1, p_1) = (200\text{kpl/kk}, 12.50\text{e})$  ja  $(q_2, p_2) = (250\text{kpl/kk}, 10.00\text{e})$ . Jos  $q_1 < q < q_2$ , niin

$$\begin{aligned} p = f(q) &\approx p_1 + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1) \\ &= 12.50 + \frac{10.00 - 12.50}{250 - 200}(q - 200) \\ &= 22.50 - 0.05q \end{aligned}$$

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

Jos jonkin suureen (esim hinta  $p$ ) arvon muuttuminen saa aikaan sen, että myös toisen suureen (esim kysyntä  $q$ ) arvo muuttuu, niin kuvaamme tämän vaikutuksen voimakkuutta joustolla seuraavsti.

$y$ :n jousto  $x$ :n suhteen on  $y$ :n prosenttimuutos jaettuna  $x$ :n prosenttimuutoksella.

$$\text{jousto} = \frac{(\Delta y / y) \cdot 100\%}{(\Delta x / x) \cdot 100\%} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

Kysynnän hintajousto (price elasticity of demand) on siis

$$\text{jousto} = \frac{q: \text{ n } \% - \text{muutos}}{p: \text{ n } \% - \text{muutos}} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

Esimerkki. Tuotteen kysynnän hintajousto on  $-1.5$ . Hinta on nyt  $p = 25.00\text{€}/\text{kpl}$  ja kysyntä on nyt  $q = 2200\text{kpl}/\text{kk}$ . Miten paljon kysyntä muuttuu, jos hinta nostetaan  $28.00$  euroon kappaleelta.

$$p = 25.00\text{€}/\text{kpl}$$

$$\Delta p = 28.00\text{€} - 25.00\text{€} = +3.00\text{euro}$$

$$q = 2200\text{kpl}/\text{kk}$$

$$\Delta q = x$$

$$\text{jousto} = -1.5$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3\text{€}} \cdot \frac{25.00\text{€}}{2200\text{kpl}/\text{kk}} = -1.5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1.5 \cdot 3\text{€} \cdot 2200\text{kpl}/\text{kk}}{25.00\text{€}} = -396\text{kpl}/\text{kk}$$

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

Esimerkki 2. Jos  $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ , niin mikä on  $y$ :n jousto  $x$ :n suhteen, kun muutokset ovat pieniä.

$$\begin{aligned}\text{jousto} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \\ &= f'(x) \cdot \frac{x}{y} \\ &= \frac{1}{2} \cdot x^{1-1/2} \cdot \frac{x}{x^{1/2}} \\ &= \frac{x}{2 \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

# Rajatuotto

Kun yritys valmistaa tuotetta jaksossa määrän  $q$  (kpl/jakso), niin kassaan kertyvä tuotto on

$$R(q) = p \cdot q = p(q) \cdot q.$$

Esimerkki. Jos kysyntäfunktio on  $p = 20 - 0.1q$ , niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2 \end{aligned}$$

Rajatuotto  $MR(q)$  kertoo miten paljon tuotto kasvaa, kun  $q$ :ta kasvatetaan yhdellä ( $\Delta q = 1$ )

$$\begin{aligned} MR(q) &= R(q+1) - R(q) \\ &= \frac{R(q+1) - R(q)}{1} \approx \frac{d}{dq} R(q) = R'(q) \end{aligned}$$

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

Esimerkki 2. Jos kysyntäfunktio on  $p = 20 - 0.1q$ , niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned}R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2\end{aligned}$$

Ja rajatuotto  $MR(q)$  on

$$\begin{aligned}MR(q) &= \frac{d}{dq}(20q - 0.1q^2) \\ &= 20 - 0.2q\end{aligned}$$

**HUOMAA:**

$$\begin{array}{l} p = 20 - 0.1q \\ MR = 20 - 0.2q \end{array} \quad \longrightarrow \quad MR < p$$

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

Rajatuottoa voidaan arvioida hinnan ja kysynnän hintajousto perusteella seuraavasti

$$\begin{aligned}MR &= \frac{d}{dq}(q \cdot p(q)) \\ &= \left(\frac{d}{dq}q\right) \cdot p(q) + q \cdot \left(\frac{d}{dq}p(q)\right) \\ &= p + q \cdot \frac{dp}{dq} = p \left(1 + \frac{dp}{dq} \cdot \frac{p}{q}\right) \\ &= p \left(1 + \frac{1}{\text{kh-jousto}}\right)\end{aligned}$$

Normaali tuotteella kysynnän hintajousto on negatiivinen ja

$$MR > 0 \quad \longrightarrow \quad \text{kh-jousto} < -1$$

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto