Derivointikaavoja, interpolointi, jousto, rajatuotto, L4b

Potenssifunktio:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

Eksponentin n ei tarvitse olla kokonaisluku, vaan se voi olla murtoluku tai desimaaliluku!

Neliöjuuri:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{ax} = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}x^{1/2}) = \dots$$

Palutui edeltävään kaavaan (EI OMAA KAAVAA)

Derivointikaavoja
Funktioita

Eksponenttifunktio:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{ax} = a \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

$$\left(\frac{d}{dx}a^{x} = \ln(a) \cdot \mathrm{e}^{x} \right)$$

Logaritmifunktio:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\ln(ax) = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\log_{a}(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \right)$$

Derivointikaavoja

Yleisiä

Tulon derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(f(c) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Eli lyhyesti

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Osamäärän derivaatta:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Eli lyhyesti

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Yhdistetyn funktion derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esimerkki 1: Olkoon $\mathrm{e}^{5x} = g(f(x))$, missä

$$\begin{array}{rclcl} f(x) & = & 5x & \longrightarrow & f'(x) = 5 \\ g(z) & = & \mathrm{e}^{z} & \longrightarrow & g'(z) = \mathrm{e}^{z} \end{array}$$

Silloin

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{e}^{5x}) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \mathrm{e}^{f(x)} \cdot f'(x) = \mathrm{e}^{5x} \cdot 5$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Esimerkki 2: Olkoon $(5+x^2)^3 = g(f(x))$, missä

$$\begin{aligned} f(x) &= 5+x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x \\ g(z) &= z^3 \longrightarrow g'(z) = 3z^2 \end{aligned}$$

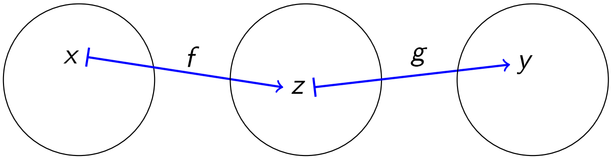
Silloin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}((5+x^2)^3) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3(f(x))^2 \cdot f'(x) \\ &= 3(5+x^2)^2 \cdot 2x = 6x(5+x^2)^2 \end{aligned}$$

Derivointikaavoja

Ketjusääntö

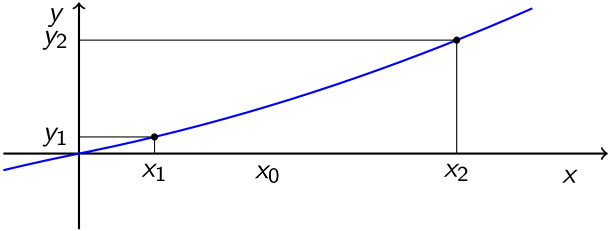
$$y = g(z) = g(f(x))$$



$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$
$$= g'(z) \cdot f'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

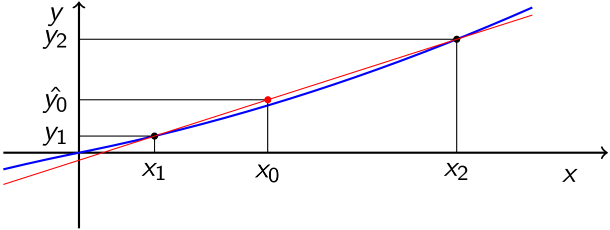
Interpolointi

Olkoon $y = f(x)$ funktio, jonka kuvaaja on "melkein suora". Tiedämme funktion f arvot kahdessa kohdassa: $y_1 = f(x_1)$ ja $y_2 = f(x_2)$. Haluamme arvioida (estimoida) funktion arvoa kohdassa x_0, joka on kohtien x_1 ja x_2 välissä.



Interpolointi

Piirretään suora pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta ja luetaan arvio suoralta



$$\frac{\hat{y}_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\boxed{f(x_0) \approx \hat{y}_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1)}$$

Interpolointi

$$\boxed{f(x_0) \approx \hat{y}_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1)}$$

- Jos $x_1 < x_0 < x_2$, niin kaavan soveltamista sanotaan **interpoloinniksi**.
- Jos x_0 ei ole kohtien x_1 ja x_2 välissä (eli $x_0 < x_1 < x_2$ tai $x_1 < x_2 < x_0$), niin kaavan soveltamista sanotaan **ekstrapoloinniksi**.
- Kaava on sama.
- Ekstrapoloinnissa syntyvä virhe saattaa olla suuri!

Interpolointi

Linearinen kysyntäfunktio

Se hinta p, jolla tuotteen koko tuotanto saadaan myytyä, riippuu tuotteen tarjotusta määrästä q. Kysyntäfunktion $p = f(q)$ lauseketta ei tunneta, eikä se ole pysyvänä edes olemassa. Jos tiedämme vastaavat arvot kahdessa nykyhetkeen verrattavassa tilanteessa (q_1, p_1) ja (q_2, p_2), niin voimme estimoida kysyntäfunktiota seuraavasti.

Olkoon tunnetut arvot $(q_1, p_1) = (200\mathrm{kpl/kk}, 12.50\mathrm{e})$ ja $(q_2, p_2) = (250\mathrm{kpl/kk}, 10.00\mathrm{e})$. Jos $q_1 < q < q_2$, niin

$$\begin{aligned} p = f(q) &\approx p_1 + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1) \\ &= 12.50 + \frac{10.00 - 12.50}{250 - 200}(q - 200) \\ &= 22.50 - 0.05q \end{aligned}$$

Jousto

Jos jonkin suureen (esim hinta p) arvon muuttuminen saa aikaan sen, että myös toisen suureen (esim kysyntä q) arvo muuttuu, niin kuvaamme tämän vaikutuksen voimakkuutta joustolla seuraavsti.

y:n jousto x:n suhteen on y:n prosenttimuutos jaettuna x:n prosenttimuutoksella.

$$jousto = \frac{(\Delta y/y) \cdot 100\%}{(\Delta x/x) \cdot 100\%} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

Kysynnän hintajousto (price elasticity of demand) on siis

$$jousto = \frac{q\text{: n } \% - \text{muutos}}{p\text{: n } \% - \text{muutos}} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

Jousto

Esimerkki. Tuotteen kysynnän hintajousto on -1.5. Hinta on nyt $p = 25.00€/\text{kpl}$ ja kysyntä on nyt $q = 2200\text{kpl}/\text{kk}$. Miten paljon kysyntä muuttuu, jos hinta nostetaan 28.00 euroon kappaleelta.

$$\begin{aligned} p &= 25.00€/\text{kpl} \\ \Delta p &= 28.00€ - 25.00€ = +3.00\text{euro} \\ q &= 2200\text{kpl}/\text{kk} \\ \Delta q &= x \\ \text{jousto} &= -1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} &= \text{jousto} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{3€} \cdot \frac{25.00€}{2200\text{kpl}/\text{kk}} &= -1.5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1.5 \cdot 3€ \cdot 2200\text{kpl}/\text{kk}}{25.00€} \cdot = -396\text{kpl}/\text{kk} \end{aligned}$$

Jousto

Esimerkki 2. Jos $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, niin mikä on y:n jousto x:n suhteen, kun muutokset ovat pieniä.

$$\begin{aligned}
\text{jousto} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \\
&= f'(x) \cdot \frac{x}{y} \\
&= \frac{1}{2} \cdot x^{1-1/2} \cdot \frac{x}{x^{1/2}} \\
&= \frac{x}{2 \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Rajatuotto

Kun yritys valmistaa tuotetta jaksossa määrän q (kpl/jakso), niin kassaan kertyvä tuotto on

$$R(q) = p \cdot q = p(q) \cdot q.$$

Esimerkki. Jos kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.1q$, niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2 \end{aligned}$$

Rajatuotto $MR(q)$ kertoo miten paljon tuotto kasvaa, kun q:ta kasvatetaan yhdellä ($\Delta q = 1$)

$$\begin{aligned} MR(q) &= R(q+1) - R(q) \\ &= \frac{R(q+1) - R(q)}{1} \approx \frac{d}{dq} R(q) = R'(q) \end{aligned}$$

Esimerkki 2. Jos kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.1q$, niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2 \end{aligned}$$

Ja rajatuotto $MR(q)$ on

$$\begin{aligned} MR(q) &= \frac{d}{dq}(20q - 0.1q^2) \\ &= 20 - 0.2q \end{aligned}$$

HUOMAA:

$$\begin{aligned} p &= 20 - 0.1q \\ MR &= 20 - 0.2q \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad MR < p$$

Rajatuotto

Rajatuottoa voidaan arvioida hinnan ja kysynnän hintajousto perusteella seuraavasti

$$\begin{aligned} MR &= \frac{d}{dq}(q \cdot p(q)) \\ &= (\frac{d}{dq}q) \cdot p(q) + q \cdot (\frac{d}{dq}p(q)) \\ &= p + q \cdot \frac{dp}{dq} = p\left(1 + \frac{dp}{dq} \cdot \frac{q}{p}\right) \\ &= p\left(1 + \frac{1}{\text{kh-jousto}}\right) \end{aligned}$$

Normaali tuotteella kysynnän hintajousto on negatiivinen ja

$$MR > 0 \qquad \longrightarrow \qquad \text{kh-jousto} < -1$$