Etelä-Pohjanmaan kesäyliopisto, kevät 2011

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

2. välikoe ma 7.3.2011

Ratkaise 3 tehtävää! Kokeessa saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa

korjaaja: Matti Laaksonen, Vaasan yliopisto, PL 700, 65101 Vaasa

1. a) (2p) Panos-tuotos -analyysi (Mihin kehitetty? Mitä sillä lasketaan? Minkä hitaaseen muuttumiseen menetelmä perustuu?)
b) (2p) Cramerin kaavat? (Milloin niitä voi käyttää? Milloin niitä kannattaa käyttää?)
c) (2p) Luettele ainakin neljä determinantin ominaisuutta, joiden avulla determinantin laskemista voi helpottaa.

a) Panos-tuotos-analyysi kehitettiin kuvaamaan kansantalouden eri toimialojen välisiä riippuvuuksia (Leontief). Menetelmä ennustaa toimialojen kokonaistuotokset, kun tiedetään ennuste toimialojen kysynnöille. Menetelmä perustuu siihen, että eri toimialojen välisiä kytkentöjä kuvaava panos-tuotos-matriisi (teknologia-matriisi) muuttuu hitaasti.

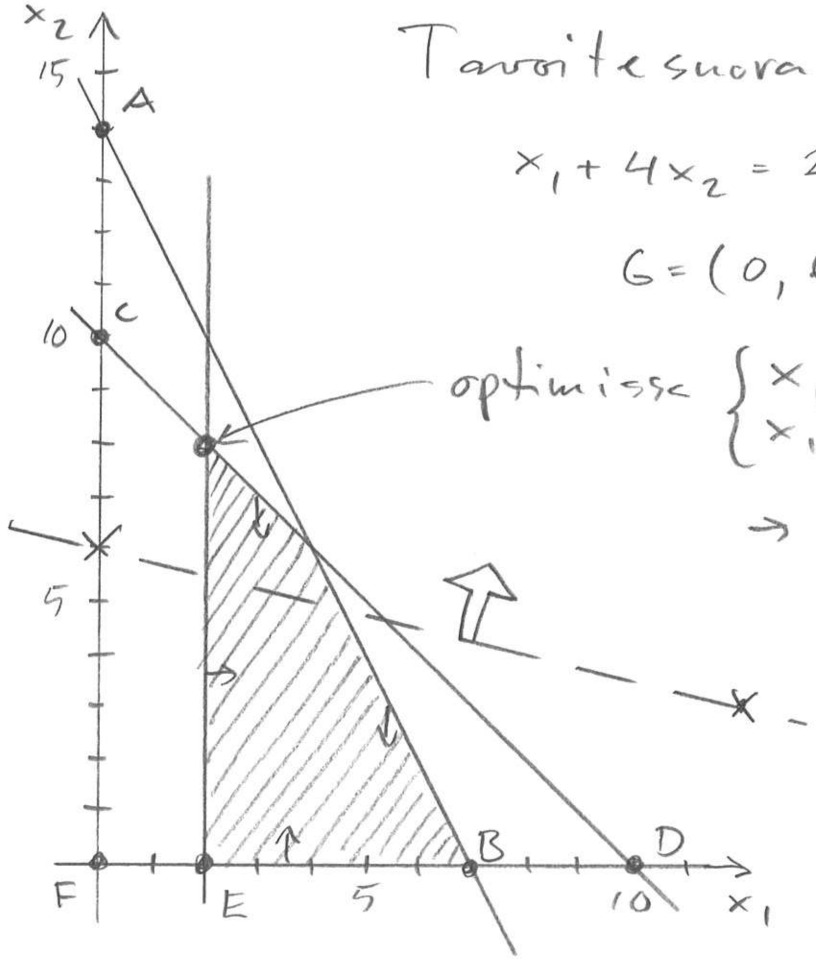
b) $x_i = D_i / D$, missä D on yhtälöryhmän kerroinkaavion determinantti ja D_i on determinantti kaaviolle, joka saadaan, kun kerroinkaavion i:s sarake korvataan yhtälöryhmän RHS:llä.
Cramerin kaavoja voidaan käyttää vain jos kerroinkaavio on neliömatriisi ja säännöllinen.
Cramerin kaavat ovat erityisen hyödylliset silloin kun kerroinkaaviossa on kirjain-parametrejä.

c) * nollarivi tai nollasarake → det = 0
* kaksi samaa riviä tai saraketta → det = 0
* jos kaavion kaksi riviä vaihdetaan keskenään niin uuden kaavion det = vanhan kaavion determinantin vastaluku
* kaavion rivin saa lisätä luvulla kerrottuna toiseen riviin. Uuden kaavion det = vanhan det.
* Kolmiomuodossa olevan kaavion det on diagonaalialkioiden tulo.

2. Ratkaise LP-malli

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max z = & x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{ehdoin} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & & & \geq & 2 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

1. rajoite	$2x_1 + x_2 \leq 14$	↓ alap.	$A=(0,14)$, $B=(7,0)$
2. rajoite	$x_1 + x_2 \leq 10$	↓ alap.	$C=(0,10)$, $D=(10,0)$
3. rajoite	$x_1 \geq 2$	→ oik.p.	$E=(2,0)$
4. rajoite	$x_2 \geq 0$	↑ yläp	$F=(0,0)$



Tavoitesuora

$$x_1 + 4x_2 = 24$$

$G=(0,6)$, $H=(12,3)$

optimissa $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 8 \\ z = 2 + 4 \cdot 8 = 34 \end{cases}$

Vastaus: optimissa $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, $z = 34$

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y - z = -2 \\ 2x - 5y + z = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \end{array}\right) \cdot 2 \;\; - \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \cdot 1 \;\; +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 & (1) \\ y - z = -2 & (2) \\ -2z = -4 & (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow z = 2$

$(2) \Rightarrow y - z = -2 \Rightarrow y = 0$

$(1) \Rightarrow x - 2\cdot 0 + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$

Vast: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

(Tarkistus $\begin{cases} 1 - 2\cdot 0 + 2 = 3 \checkmark \\ 0 - 2 = -2 \checkmark \\ 2\cdot 1 - 5\cdot 0 + 2 = 4 \checkmark \end{cases}$)

4. Olkoon

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laske $\det(\mathbf{M})$, $\mathbf{M}^T$ ja $\mathbf{M}^{-1}$.

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) + (0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) + 4 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 2)$$

$$= 2 + 2 - 8 = -4$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad |M_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad |M_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad |M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \qquad |M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad |M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad |M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} +|M_{11}| & -|M_{21}| & -|M_{31}| \\ -|M_{12}| & +|M_{22}| & +|M_{32}| \\ +|M_{13}| & -|M_{23}| & -|M_{33}| \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} +(2) & -(-5) & +(-3) \\ -(2) & +(-7) & -(-1) \\ +(-2) & -(3) & +(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2/4 & -5/4 & 3/4 \\ 2/4 & 7/4 & -1/4 \\ 2/4 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}50 & -1{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}50 & 1{,}75 & -0{,}25 \\ 0{,}50 & 0{,}75 & -0{,}25 \end{pmatrix}$$

Vastaus: $\det(M) = -4$, $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

	2000		2010	
tuote	p_0	q_0	p_t	q_t
1	10,00	200	15,00	300
2	2,00	500	8,00	100
3	30,00	20	15,00	100

a) Laske Laspeyres'in ja Paashenin hintaindeksit.
b) Mikä selittää indeksien suuren eron?

a) Laspeyres

$$P^L = \frac{15\cdot 200 + 8\cdot 500 + 15\cdot 20}{10\cdot 200 + 2\cdot 500 + 30\cdot 20}\cdot 100 = 202{,}8$$

Paaschen

$$P^P = \frac{15\cdot 300 + 8\cdot 100 + 15\cdot 100}{10\cdot 300 + 2\cdot 100 + 30\cdot 100}\cdot 100 = 109{,}7$$

b) Erot selittyvät painokertoimista
Laspeyresin indeksi käyttää painokertoimina perusvuoden (2000) määriä. Suurin paino on tuotteella 2, jonka hinta muuttui nelinkertaiseksi.
Paaschenin indeksi käyttää painokertoimina vertailuvuoden (2010) määriä. Suurin paino on tuotteella 1, jonka hinta muuttui puolitoistakertaiseksi. Lisäksi tuote 3, jonka hinta puolittui saa nyt isomman painon kuin Laspeyresin indeksissä.