

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1. harjoitus, viikko 4 (pe-la 27.-28.1.2012)

1. Sievennä seuraavat lausekkeet. Anna tulos murtolukuna ja desimaalilukuna. Tee laskut ensin kynällä ja paperilla, ja sitten laskimella.

$$\text{a) } \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \quad \text{b) } \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}} \quad \text{c) } \frac{5/3}{2/4 \cdot 3} \cdot \frac{4}{5}$$

Ratkaisu:

a) Käsini:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0,625$$

a) Laskimella:

$$\begin{array}{l} \text{laskettava: } \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \\ \text{näppäilyt: } 3 \boxed{\div} 4 \boxed{-} 1 \boxed{\div} 4 \boxed{=} \\ \text{tulos: } 0.625 \end{array}$$

b) Käsini:

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{10} - \frac{4}{10}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{1} = \frac{5}{2} \approx 2,5$$

b) Laskimella:

$$\begin{array}{l} \text{laskettava: } \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}} = \frac{(\frac{1}{4})}{(\frac{1}{2} - \frac{2}{5})} \\ \text{näppäilyt: } (\boxed{1} \boxed{\div} \boxed{4} \boxed{)}) \boxed{\div} (\boxed{1} \boxed{\div} \boxed{2} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{\div} \boxed{5} \boxed{)}) \boxed{=} \\ \text{tulos: } 2.5 \end{array}$$

c) Käsini:

$$\frac{5/3}{2/4 \cdot 3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{2} \cdot 3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{9}$$

c) Laskimella:

$$\begin{array}{l} \text{laskettava: } \frac{5/3}{2/4 \cdot 3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{(5/3)}{(2/4 \cdot 3)} \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \\ \text{näppäilyt: } (\boxed{5} \boxed{\div} \boxed{3} \boxed{)}) \boxed{\div} (\boxed{2} \boxed{\div} \boxed{4} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{)}) \boxed{\times} (\boxed{4} \boxed{\div} \boxed{5} \boxed{)}) \boxed{=} \\ \text{tulos: } 0.888888889 \end{array}$$

2. Sievennä seuraavat lausekkeet. Tee laskut ensin kynällä ja paperilla, ja sitten laskimella.

a) $25^2 + 2 \cdot 5^2$ b) $25^{-1} + 25^0$ c) $(0,2)^{-2} \cdot 2^2$

Ratkaisu:

a) Käsini:

$$25^2 + 2 \cdot 5^2 = 625 + 2 \cdot 25 = 650$$

a) Laskimella:

laskettava: $25^2 + 2 \cdot 5^2$
 näppäilyt: 25 ^ 2 + 2 × 5 ^ 2 =
 tulos: 650

b) Käsini:

$$25^{-1} + 25^0 = \frac{1}{25} + 1 = 1,04$$

b) Laskimella:

laskettava: $25^{-1} + 25^0 = 25^{(-1)} + 25^0$
 näppäilyt: 25 ^ (-1) + 25 ^ 0 =
 tulos: 1.04

c) Käsini:

$$(0,2)^{-2} \cdot 2^2 = \left(\frac{1}{0,2}\right)^2 \cdot 2^2 = \left(\frac{2}{0,2}\right)^2 = 10^2 = 100$$

c) Laskimella:

laskettava: $(0,2)^{-2} \cdot 2^2 = 0,2^{(-2)} \cdot 2^2$
 näppäilyt: 0.2 ^ (- 2) × 2 ^ 2 =
 tulos: 100

3. Ratkaise seuraava yhtälö. Älä muuta kertoimia desimaaliluvuiksi, vaan laske kokonais- tai murtoluvuilla. Anna vastaus sekä murtolukuna, että desimaalilukuna kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

$$x + \frac{1}{2} = 1 - \frac{x}{7}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} &= 1 - \frac{x}{7} & | \cdot 14 \\ \Leftrightarrow 14x + 7 &= 14 - 2x \\ \Leftrightarrow 16x &= 7 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$

4. Ratkaise yhtälöt

a) $5 - x = 8 - 5x$ b) $3(2x + 1) = 6(x - 1)$ c) $4x^2 + 5x + 1 = 0$

Ratkaisu:

a)	b)	c)
$5 - x = 8 - 5x$ $\Leftrightarrow -x + 5x = 8 - 5$ $\Leftrightarrow 4x = 3$ $\Leftrightarrow x = 3/4$	$3(2x + 1) = 6(x - 1)$ $\Leftrightarrow 6x + 3 = 6x - 6$ $\Leftrightarrow 6x - 6x = -6 - 3$ $\Leftrightarrow 0 = -9$ $\Leftrightarrow Rj = \emptyset$	$4x^2 + 5x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$ $\Leftrightarrow x = (5 \pm \sqrt{9})/8$ $\therefore \begin{cases} x_1 = (-5 - 3)/8 = -1 \\ x_2 = (-5 + 3)/8 = -1/4 \end{cases}$

5. Yritys hankkii 4,25 tonnia raaka-ainetta ja maksaa siitä 1500 euroa. Raaka-aine on kosteata siten, että 15,1% massasta on vettä. Raaka-aineeseen lisätään kuivaa väriaineita 120kg ja vettä niin, että lisäysten jälkeen massasta on vettä 20,0%.

a) Mikä on lisäysten jälkeen värjätyn raaka-aine-erän massa?

b) Mikä on värjätyn raaka-aineen yksikköhinta, kun väriaineen hinta on 3,20€/kg ja vesi ei maksa mitään?

c) Mikä on väriaineen euromääräinen osuus ja prosentti-osuus värjätyn raaka-aineen hinnasta?

Ratkaisu:

Ennen lisäyksiä raaka-aineessa on vettä ja kuivaa ainetta määrät

$$\frac{15,1}{100} \cdot 4250\text{kg} = 641,75\text{kg} \quad (\text{vettä})$$
$$4250\text{kg} - 641,75\text{kg} = 3608,25\text{kg} \quad (\text{kuivaa})$$

Merkitään lisätyn veden määrää x :llä. Lisäysten jälkeen vastaavat ainemäärät ovat

$$641,75\text{kg} + x \quad (\text{vettä})$$
$$3608,25\text{kg} + 120\text{kg} = 3728,25\text{kg} \quad (\text{kuivaa})$$
$$4250\text{kg} + 120\text{kg} + x = 4370\text{kg} + x \quad (\text{koko massa})$$

Lisäysten jälkeen vettä on 20% kaikesta, siis

$$641,75\text{kg} + x = \frac{20}{100} \cdot (4370\text{kg} + x) \quad | \cdot 100$$
$$\Leftrightarrow 64175\text{kg} + 100x = 87400\text{kg} + 20x$$
$$\Leftrightarrow 100x - 20x = 87400\text{kg} - 64175\text{kg}$$
$$\Leftrightarrow 80x = 23225\text{kg} \quad | : 80$$
$$\Leftrightarrow x = 290,3125\text{kg} \approx 290\text{kg}$$

a) Värjätyn raaka-aine-erän massa on $4250\text{kg} + 120\text{kg} + 290\text{kg} = 4660\text{kg}$.

b) Kokonaiskustannus / saatu määrä

$$\frac{1500\text{€} + 120\text{kg} \cdot 3,20\text{€/kg}}{4660\text{kg}} = \frac{1884\text{€}}{4660\text{kg}} = 0,40429\text{€/kg}$$

c) Väriaineen prosenttiosuus värjätyn raaka-aineen hinnasta on

$$\frac{120\text{kg} \cdot 3,20\text{€/kg}}{1500\text{€} + 120\text{kg} \cdot 3,20\text{€/kg}} \cdot 100\% = \frac{384\text{€}}{1884\text{€}} \cdot 100\% = 20,382\%$$

Siis värjätyn raaka-aineen hinnasta väriaineen osuutta on

$$\frac{20,382}{100} \cdot 0,40429\text{€/kg} = 0,08240\text{€/kg}$$

6. Yritys myy valmistamansa tuotteet 125€ hintaan.

Kate (myyntitulo - valmistuskustannus) on 12,50€ per tuote (eli 10,0% myyntihinnasta). Raaka-aineen hankintakustannus on 72,50€ per tuote. Raaka-aineen hinta laskee 10,00%:lla. Muut valmistuskustannukset eivät muutu (työ yms.). Laske:

- Miten monta euroa kate kasvaa(per tuote)?
- Miten monta prosenttia kate kasvaa?
- Miten monta prosenttiyksikköä kate kasvaa?
- Miten muuttuu raaka-aineen hankintakustannuksen prosenttiosuus valmistuskustannuksista?

Ratkaisu:

Ennen hinnan muutosta

$$\begin{aligned} \text{myyntihinta } p_1 &= 125\text{€/tuote} \\ \text{kate } K_1 &= 12,50\text{€/tuote} \\ \text{valmistuskustannus } c_1 &= p_1 - K_1 = 112,50\text{€/tuote} \\ \text{raaka-ainekustannus } rc_1 &= 72,50\text{€/tuote} \\ \text{muu kustannus } mc_1 &= c_1 - rc_1 = 112,50\text{€/tuote} - 72,50\text{€/tuote} \\ &= 40,00\text{€/tuote} \\ \text{kateprosentti } \frac{K_1}{p_1} \cdot 100\% &= \frac{12,50\text{€}}{125\text{€}} \cdot 100\% = 10,0\% \\ \text{r-a:n \% -osuus } \frac{rc_1}{c_1} \cdot 100\% &= \frac{72,50\text{€}}{112,50\text{€}} \cdot 100\% = 64,4\% \end{aligned}$$

Hinnan muutoksen jälkeen

$$\begin{aligned} \text{myyntihinta } p_2 &= p_1 = 125\text{€/tuote} \quad \text{ei muuttunut} \\ \text{raaka-ainekustannus } rc_2 &= 0,9 \cdot rc_1 = 65,25\text{€/tuote} \\ \text{muu kustannus } mc_2 &= mc_1 = 40,00\text{€/tuote} \quad \text{ei muuttunut} \\ \text{valmistuskustannus } c_2 &= rc_2 + mc_2 = 65,25\text{€/tuote} + 40,00\text{€/tuote} = 105,25\text{€/tuote} \\ \text{kate } K_2 &= p_2 - c_2 = 125\text{€/tuote} - 105,25\text{€/tuote} = 19,75\text{€/tuote} \\ \text{kateprosentti } \frac{K_2}{p_2} \cdot 100\% &= \frac{19,75\text{€}}{125\text{€}} \cdot 100\% = 15,8\% \\ \text{r-a:n \% -osuus } \frac{rc_2}{c_2} \cdot 100\% &= \frac{65,25\text{€}}{105,25\text{€}} \cdot 100\% = 62,0\% \end{aligned}$$

Vastauksia:

a) $K_2 - K_1 = 19,75\text{€/tuote} - 12,50\text{€/tuote} = 7,25\text{€/tuote}$. Siis

Kate kasvaa 7,50 euroa tuotteelta.

b) $(\text{kasvu/vanha}) \cdot 100\% = (K_2 - K_1) / K_1 \cdot 100\% = 7,25\text{€} / 12,50\text{€} \cdot 100\% = 58\%$. Siis

Kate kasvaa 58%.

c) Kateprosentin muutos (uusi - vanha) on $15,8\% - 10,0\% = 5,8\%$ -yksikköä. Siis

Kate(prosentti) kasvaa 5,8%-yksiköllä

d) Prosenttiosuuden muutos

(uusi prosenttiosuus - vanha prosenttiosuus) =

$(62,0\% - 64,4\%) = -2,4\%$ -yksikköä. Siis

Raaka-aineen prosenttiosuus valmistuskustannuksista vähenee 2,4 %yksiköllä.

Muista:

Muutos = uusi – vanha

[Vastauksia: 1a) $5/8 = 0,625$ 1b) $5/2 = 2,5$ 1c) $8/9 \approx 0,889$ 2a) 675 2b) 1,04 2c) 100.]