Pohjois-Pohjanmaan kesäyliopisto, kevät 2012

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

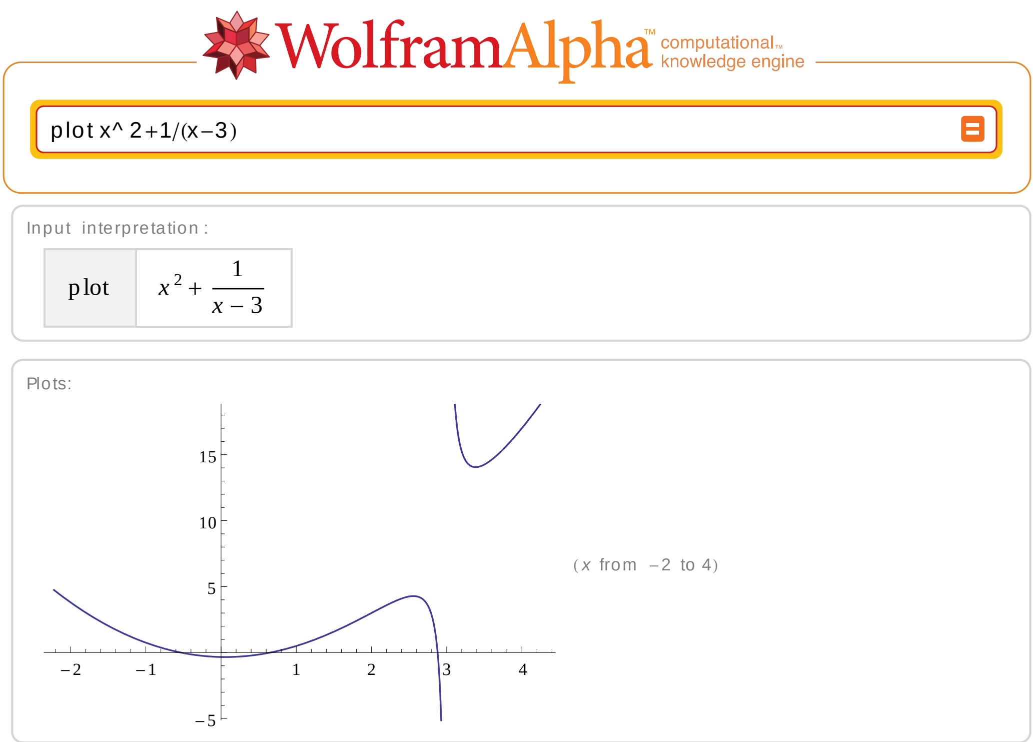
2. harjoitus, viikko 5 (pe 3.2.2012)

1. Ratkaise yhtälö $\quad 1.015^x = 1.25$

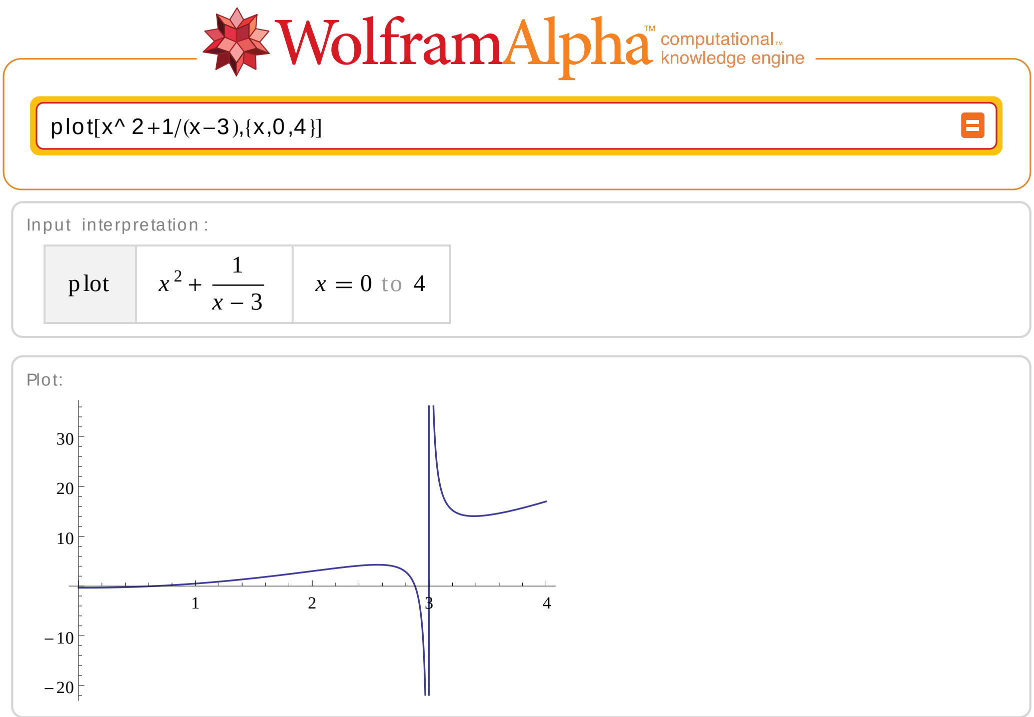
Ratkaisu:

$$\begin{aligned} 1.015^x &= 1.25 \\ \Leftrightarrow \ln\left(1.015^x\right) &= \ln\left(1.25\right) \\ \Leftrightarrow x \ln 1.015 &= \ln 1.25 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\ln 1.25}{\ln 1.015} \approx 14{,}988 \end{aligned}$$

2. Piirrä funktion $f : [0,4] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + \frac{1}{x-3}$ kuvaaja.
(Vihje: Huomaa, että funktio on määritelty välillä $0 \le x \le 4$.
Voit kokeilla sivustolta ”`http://www.wolframalpha.com/`” löytyvää työkalua. Anna syötekenttään komento: `plot x^2+1/(x-3)`
Lisää esimerkkejä löydät verkkosivulta:
”`http://www.wolframalpha.com/examples/Math.html`”) *Ratkaisu:*

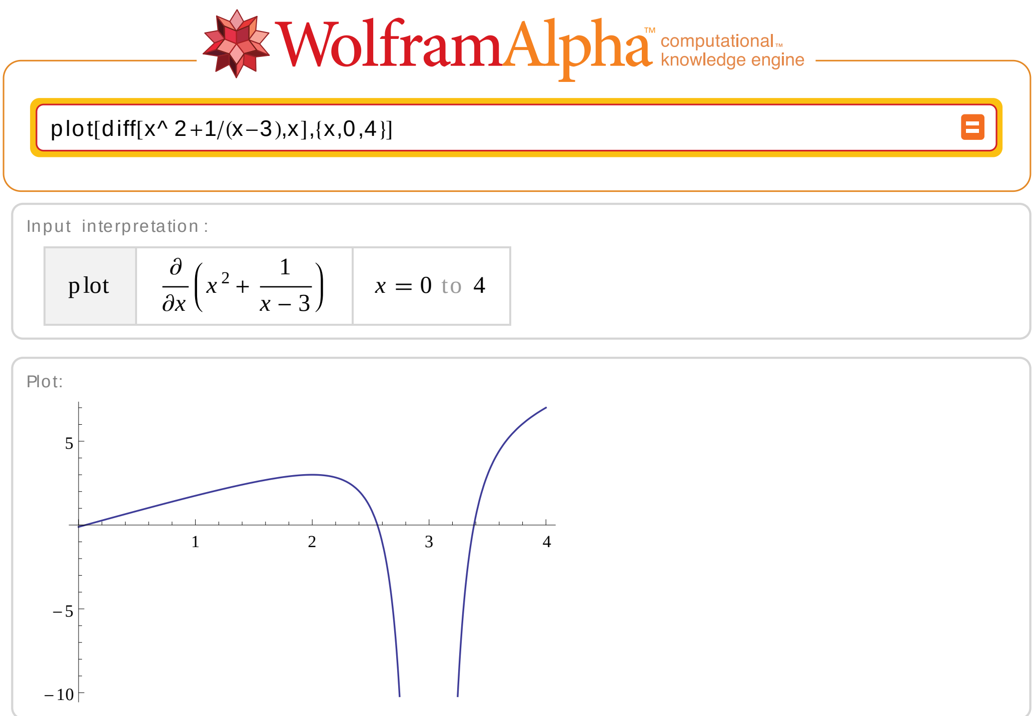


Hieman tarkemman kuvan saa komennolla:



Huomaa, että kuvaajassa oleva pystyviiva on numeriikasta johtuva virhe. (Taustalla oleva tietokoneohjelma ei osaa nostaa kynää epäjatkuvuuskohdassa. Edellisessä kuvassa ohjelma osasi nostaa kynän. Tämä on esimerkki tekoälyn osaamisen häilyvyydestä. Koneeseen ei sa uskoa sokeasti.)

Funktiolla on epäjatkuvuuskohta murtolausekkeen nimittäjän nollakohdassa $x = 3$. Funktio on kasvava väleillä $(0; 2{,}55)$ ja $(3{,}4; 4)$. Tarkkoja rajoja on vaikea nähdä tarkasti. Rajoista saa parhaan käsityksen, kun piirrättää funktion derivaatan kuvaajan



3. Laske derivaatat seuraaville funktioille

a) $f(x) = 3x^3 + 5x^2$ b) $g(x) = 2(3x^2 - 4x + 7)$ c) $h(x) = (x+5)^2$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad f(x) &= 3x^3 + 5x^2 \\
\rightarrow f'(x) &= 9x^2 + 10x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad g(x) &= 2(3x^2 - 4x + 7) \\
&= 6x^2 - 8x + 14 \\
\rightarrow g'(x) &= 12x - 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad h(x) &= (x+5)^2 \\
&= x^2 + 10x + 25 \\
\rightarrow h'(x) &= 2x + 10
\end{aligned}$$

4. Tuotteen A valmistuskustannus $C_a(q)$ (€/k) on valmistusmäärän q (kpl/kk) funktio siten, että

$$C_a(q) = 25 + 2.3q + 0.002q^2.$$

Vastaava rajakustannus on

$$MC_a(q) = \frac{d}{dq} C_a(q) = \frac{d}{dq}(25 + 2.3q + 0.002q^2)$$

Laske a) $C_a(100)$, b) $MC_a(q)$, c) $MC_a(100)$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
C_a(q) &= 25 + 2.3q + 0.002q^2 \\
MC_a(q) &= 2.3 + 0.004q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_a(100) &= 25 + 2.3 \cdot 100 + 0.002 \cdot 100^2 = 275 \\
MC_a(100) &= 2.3 + 0.004 \cdot 100 = 2.7
\end{aligned}$$

Vastaus: a) $C_a(100) = 275$, b) $MC_a(q) = 2.3 + 0.004q$, c) $MC_a(100) = 2.7$.

5. Funktiosta $f(x)$ tiedetään arvot $f(0.25) = 1.34$ ja $f(0.40) = 1.52$. Arvioi lineaarisen interpoloinnin avulla funktion arvoa kohdassa $x = 0.30$.
Ratkaisu:
Kaava:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0))$$

Sijoitukset kaavaan:

$$\begin{aligned}
f(0.30) &\approx 1.34 + \frac{0.30 - 0.25}{0.40 - 0.25}(1.52 - 1.34) \\
&= 1.34 + \frac{0.05}{0.15}(0.18) = 1.40
\end{aligned}$$

Vastaus: $f(0.30) \approx 1.40$

6. Erään tuotteen kysynnän hintajousto on -2.1. Tuotteen hinta on nyt 20.50 €/kpl ja sen kysyntä on 150kpl/kk.
a) Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen yksikköhintaa alennetaan eurolla?
b) Miten muuttuu myyntitulo $R = pq$, kun yksikköhintaa alennetaan eurolla?
c) Olkoon kustannusfunktio $C(q) = 300 + 12{,}00 \cdot q + 0.01 \cdot q^2$ (€/kk) . Kannattaako edellä kuvattu hinnan alentaminen eurolla tässä tapauksessa.
Ratkaisu:

$$\begin{aligned} q &= 150\text{kpl/kk} \\ \Delta q &= x \\ p &= 20.50\text{€/kpl} \\ \Delta p &= -1.00\text{€/kpl} \\ \text{jousto} &= -2.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} &= \text{jousto} \\ \longleftrightarrow \quad \frac{x}{-1\text{€/kpl}} \cdot \frac{20.50\text{€/kpl}}{150\text{kpl/kk}} &= -2.1 \\ x &= \frac{-2.1 \cdot (-1) \cdot 150\text{kpl/kk}}{20.50} = 15.4\text{kpl/kk} \end{aligned}$$

Ennen hinnan muutosta:

$$\begin{aligned} \text{myynti } R_1 = p_1 q_1 &= 20.50\text{euro/kpl} \cdot 150\text{kpl/kk} = 3075\text{€/kk} \\ \text{kustannus } C_1 &= 300 + 12.00 \cdot 150 + 0.01 \cdot 150^2 = 2325\text{€/kk} \\ \text{voitto } P_1 = R_1 - C_1 &= 3075\text{€/kk} - 2325\text{€/kk} = 750\text{€/kk} \end{aligned}$$

Hinnan muutoksen jälkeen:

$$\begin{aligned} \text{myynti } R_2 = p_2 q_2 &= 19.50\text{euro/kpl} \cdot 165.4\text{kpl/kk} = 3225{,}30\text{€/kk} \\ \text{kustannus } C_2 &= 300 + 12.00 \cdot 165.4 + 0.01 \cdot 165.4^2 = 2558.37\text{€/kk} \\ \text{voitto } P_2 = R_2 - C_2 &= 3225{,}30\text{€/kk} - 2558.37\text{€/kk} = 666.93\text{€/kk} \end{aligned}$$

Vastaus a) Tuotteen kysyntä kasvaa noin 15.4 kappaleella kuukaudessa (uusi kysyntä 165.4 kpl/kk on noin 10.3% isompi kuin alkuperäinen)
b) Myyntitulo kasvaa 150.37€/kk (noin 5.4 prosentin kasvu)
c) Kustannukset kasvavat määrän $\Delta C = C_2 - C_1 = 2558.37\text{€/kk} - 2325\text{€/kk} = 233.37\text{€/kk}$. Kustannukset kasvavat siis enemmän kuin myynnistä saatu tulo, joten hinnan alennus ei kannata.