Nobelin muistopalkinto taloustieteestä 2003: R. Englen ARCH-malli

Tommi Sottinen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin y-lipasto

24. maaliskuuta 2004

Vuoden 2003 Nobelin muistopalkinnon taloustieteestä (A. Nobel ei testamentissaan maininnut taloustiedettä. Nobelin muistopalkinto taloustieteestä onkin Ruotsin Pankin rahoittama) jakoivat **Clive Granger** ja **Robert Engle**. Molemmat palkituista tutkivat ekonometrisiä aikasarjoja. Palkinto tuli "kointegraatiosta" ja ARCH-mallista. Keskityn jatkossa lyhyesti selittämään, mistä ARCH-mallissa on kyse. Laajempi selvitys ARCH-mallista ja kointegraatiosta löytyy Nobel e-museumin sivuilta `www.nobel.se`.

Yleensä ARCH-malli esitetään hajottalla aikasarja ennusteeseen ja ennustevirheeseen, ja itse ARCH-oletus koskee tällöin ennustevirhettä. Seuraavassa esitän kuitenkin ARCH-mallin toisella tavalla käyttämällä niin sanottua **Woldin** hajotelmaa. Tämän lähestymistavan innoituksena on ollut artikkeli [2].

Olkoon r_t jokin talouteen liittyvä stokastinen heikosti stationaarinen aikasarja (heikko, eli toisen kertaluvun, stationaarisuus tarkoittaa sitä, että odotusarvo $\mathbf{E}(r_t)$ on vakio ja kovarianssi $\mathbf{Cov}(r_t, r_s)$ riippuu ajanhetkistä t ja s ainoastaan etäisyyden $|t-s|$ kautta). Jos esimerkiksi s_t on jokin riskillisen sijoituskohteen, kuten osakkeen, hinta hetkellä t, niin sijoituksen logaritmisen tuoton

$$r_t = \log \frac{s_t}{s_{t-1}}$$

ajatellaan tyypillisesti olevan heikosti stationaarinen. Woldin hajotelman [7] nojalla jokainen heikosti stationaarinen aikasarja r_t voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} r_t &= m + u_t \\ &= m + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}. \end{aligned}$$

Hajotelmassa vakio m on keskimääräinen tuotto: $m = \mathbf{E}(r_t)$. Vakiot b_0, b_1, $\ldots$ ovat neliöllisesti summautuvia:

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j^2 < \infty,$$

ja lisäksi $b_0 = 1$ (tämä on vain normalisointi). Jono ε_t, jota myös innovaatioksi kutsutaan, on valkoinen häly:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) &= 0, \text{ kun } t \neq s, \\ \mathbf{Var}(\varepsilon_t) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujajono ε_t ei välttämättä ole gaussinen, eli normaalisti jakautunut. Siten, vaikka ε_t:t ovatkin korreloimattomia, ne eivät välttämättä ole riippumattomia. Perinteisesti stationaarisia aikasarjoja mallinnettaessa kuitenkin oletettiin häly ε_t gaussiseksi, tai vähintäänkin riippumattomaksi. Näin tehtiin kai lähinnä mukavuussyistä ja siksi, että oltiin enemmänkin kiinnostuneita ennustamisesta, siis ehdollisen odotusarvon mallintamisesta, kuin aikasarjan heilahtelusta, eli ehdollisesta varianssista. Koska ε_t:t ovat korreloimattomia, niin r_t:n odotusarvo ja varianssi ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r_t) &= m, \\ \mathbf{Var}(r_t) &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} b_j^2. \end{aligned}$$

Ehdollinen odotusarvo on regressio hälystä ε_t:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r_t|\mathscr{F}_{t-1}) &= m + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \mathbf{E}(\varepsilon_{t-j}|\mathscr{F}_{t-1}) \\ &= m + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}. \end{aligned}$$

Yllä $\mathscr{F}_{t-1}$ on satunnaismuuttujista ε_{t-1}, ε_{t-2}, ... saatu informaatio. Oletamme nyt, kuten perinteisesti tehtiin, että ε_t on gaussinen, tai riippumaton, valkoinen häly. Tämä riippumaton tapaus mallintaa huonosti ehdollista varianssia. Nimittäin

$$\begin{aligned} &\mathbf{Var}(r_t|\mathscr{F}_{t-1}) \\ &= \mathbf{E}\left((r_t - \mathbf{E}(r_t|\mathscr{F}_{t-1}))^2 |\mathscr{F}_{t-1} \right) \\ &= \mathbf{E}\left((b_0\varepsilon_t)^2 |\mathscr{F}_{t-1} \right) \\ &= \mathbf{E}\left(\varepsilon_t^2 |\mathscr{F}_{t-1} \right) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

(tässä syy normalisointiin $b_0 = 1$). Ehdollinen varianssi on siis vakio. Toisin sanoen r_t on ehdollisesti homoskedastinen. Aikasarjaa, jonka varianssi on vakio kutsutaan homoskedastiseksi. Muuten se on heteroskedastinen. Heikosti stationaariset aikasarjat ovat tietysti homoskedastisia.

Yleisesti ottaen stationaarisen aikasarjan ehdollinen varianssi ei tietenkään ole vakio. Erityisesti tämä pätee taloudellisiin aikasarjoihin. Ehdollinen varianssi, jota talousteoreetikoilla on tapana kutsua volatiliteetiksi, on usein "rypästynyt" niin, että että suurien heilahtelujen jälkeen on tapana tulla suuria heilahteluja ja pienten heilahtelujen jälkeen on vastaavasti odotettavissa pieniä heilahteluja. Erityisesti siis volatiliteetti on stokastinen. Tämä ilmiö on ollut jo pitkään tunnettu. Esimerkiksi **Mandelbrot** [5] kirjoitti siitä jo 60-luvulla. Mandelbrot ei kuitenkaan mallintanut tätä rypästymistä. Sen sijaan hän keskittyi seuraavaan huomioon. Logaritminen tuotto r_t on harvoin käytännössä gaussinen. Itse asiassa sen jakaumalla on tyypillisesti paksummat hännät, kuin normaalijakaumalla. Edellä esitetyssä mallissahan r_t oli gaussinen, koska se oli riippumattomien gaussisten satunnaismuuttujien summa.

Talousteorian kannalta volatiliteetin mallintaminen ensiarvoisen tärkeää. Esimerkiksi johdannaisten hinnoittelun kannalta se on keskeisempää, kuin varsinainen ennustaminen, siis ehdollisen odotusarvon $\mathbf{E}(r_t|\mathscr{F}_{t-1})$ mallintaminen. Tämä aluksi oudolta vaikuttava väite perustuu siihen, että volatiliteetti on riski, jota vastaan suojaudutaan. Aihetta on selostettu aikaisemmin tässäkin lehdessä [6].

Yksinkertainen tapa mallintaa taloudellisissa aikasarjoissa havaittua rypästymisilmiötä olisi asettaa hajotelmassa $r_t = m + u_t$

$$u_t = u_{t-1}\varepsilon_t,$$

missä ε_t on gaussinen valkoinen häly. Tämä on esimerkki mallista, jonka **Granger** ja **Anderson** [4] esittivät. Malli on yksinkertainen, mikä on sinänsä hyvä. Lisäksi nyt ehdollinen varianssi on $\sigma^2 u_{t-1}^2$, mikä vastaakin hyvin rypästymistä. Valitettavasti kuitenkin ehdollistamattomalle varianssille saadaan yhtälö

$$\mathbf{Var}(u_t) = \sigma^2 \mathbf{Var}(u_{t-1}).$$

Siten siis $\mathbf{Var}(u_t)$ on joko 0 tai ∞. Tämä ei tietenkään ole suotavaa.

Sittemmin klassikoksi muodostuneessa artikkelissaan **Engle** [3] esitti seuraavan ratkaisun mallittaa volatiliteetin rypästymistä ja epägaussisuutta. Aikasarjan r_t Woldin hajotelmassa

$$r_t = m + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j},$$

oletamme, että valkoinen häly ε_t on ARCH-innovaatio. Toisin sanoen se on ehdollisesti gaussinen:

$$\varepsilon_t | \mathscr{F}_{t-1} \sim \mathrm{N}(0, \sigma_t^2),$$

missä ehdollisella varianssilla on Woldin hajotelma hälyn ε_t neliön suhteen:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2.$$

Tämä on ARCH(∞)-malli parametrein α_0, $\alpha_1, \ldots$. Ajatus on siis se, että j hetkeä sitten tapahtunut "absoluuttinen sokki" ε_{t-j}^2 näkyy volatiliteetissä vielä voimalla α_j. Luonnollisesti, jotta σ_t^2 olisi positiivinen, oletamme, että parametrit ovat ei-negatiivisia. Ja jotta malli ei olisi degeneroitunut tule olla $\alpha_0 > 0$. Lisäksi

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbf{Var}(\varepsilon_t) \\ &= \mathbf{E}(\sigma_t^2) \\ &= \alpha_0 + \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i. \end{aligned}$$

Siten

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i},$$

ja stationaarinen varianssi σ^2 on olemassa jos ja vain jos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < 1.$$

ARCH on akronyymi sanoista **A**uto-**R**egressive **C**onditional **H**eteroscedastic (vaihtoehtoisia selityksiä löytyy sivulta `englenobel.blogs.com`). Malli on ehdollisesti heteroskedastinen:

$$\mathbf{Var}(r_t | \mathscr{F}_{t-1}) = \mathbf{E}(\varepsilon_t^2 | \mathscr{F}_{t-1}) = \sigma_t^2.$$

Ilman ehdollistamista se on tietysti homoskedastinen, sen stationaarinen varianssi laskettiinkin jo edellä. ARCH-mallin autoregressiivisyys nähdään seuraavasti. Merkitään

$$v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2.$$

Tällöin

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + v_t.$$

Koska $\mathbf{E}(\varepsilon_t^2 | \mathscr{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$, niin v_t on martingaalidifferenssi. Se on siis valkoinen häly, tosin yleisesti ottaen epägaussinen sellainen. Tämä tarkoittaa sitä, että ε_t^2 on AR(∞)-prosessi.

ARCH-aikasarja ε_t on siis ehdollisesti normaali. Ehdollistamatta ε_t:n jakauma ei ole normaali. Sen jakaumasta saadaan kuitenkin tietoa laskemalla sen momentit, joiden olemassaolo tietysti riippuu parametreistä α_0, $\alpha_1, \ldots$. Momenttien laskeminen käy helposti käyttämällä ehdollista normaalisuutta ja kaavaa

$$\mathbf{E}(\varepsilon_t^n) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\varepsilon_t^n | \mathscr{F}_{t-j}))$$

riittävän monta kertaa peräkkäin.

Käytännössä ei tietenkään voida käyttää ARCH(∞)-mallia, vaan autoregressio pitää katkaista jostakin kohtaa. Toisin sanoen käytännön mallinnuksessa $\alpha_j = 0$, kun $j > p$. Tämä ARCH(p)-malli on onnistunut siinä suhteessa, että se mallintaa hyvin volatiliteetin rypästymistä ja sillä saadaan aikaan jakaumia, joiden hännät ovat paksumpia, kuin normaalijakaumalla. Lisäksi malli on vielä niin yksinkertainen, että sitä voidaan analysoida: parametreille α_0, α_1, ..., α_p osataan löytää suurimman uskottavuuden estimaatit normaaliin tapaan numeerisesti ja ARCH-innovaatiota osataan testata nollahypoteesia $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$ vastaan. Nämä seikat löytyvät jo Englen alkuperäisestä artikkelista [3].

ARCH(p)-mallilla on kuitenkin merkittävä heikkous. Käytännössä on huomattu, että jonon ε_t^2 autokorrelaatio suppenee kohti nollaa varsin hitaasti. Tämä tarkoittaa sitä, että parametrivektorin dimensio p on iso. Tämä ei tietenkään ole käytännössä suotavaa. Tämän ongelman ratkaisi **Bollerslev** esittämällä GARCH(p, q)-mallin artikkelissaan [1]. Ongelman ratkaisu on ilmeinen, kun huomaa, että ARMA-prosessia voidaan pitää ääretönparametrisen AR-prosessin approksimaationa. Bollerslevin ratkaisu oli siis esittää ehdollinen varianssi σ_t^2 aikaisempien hälyjen ja ehdollisten varianssien summana:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \sigma_{t-i}^2.$$

Nimi GARCH tulee tietysti sanoista **G**eneralized **A**uto**R**egressive **C**onditional **H**eteroscedastic. GARCH(p, q)-malli onkin ARCH(p)-mallin yleistys: ARCH(p) = GARCH($p, 0$). Toisaalta GARCH(p, q) on kuitenkin ARCH(∞)-mallin erikoistapaus. Osuvampi nimitys saattaisikin olla ARMACH. Nimittäin merkitsemällä

$$v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$$

saamme

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{q} v_{t-i} + v_t.$$

Kuten ARCH-mallin tapauksessa huomaamme, että v_t on valkoinen häly. Siten ε_t^2 on ARMA($\max(p, q), q$)-prosessi.

Mainittakoon lopuksi, että, kuten arvata saattaa, ARCH/GARCH-malleista löytyy yleistyksiä vähän joka suuntaan. Käytännössä yksi suosituimmista malleista lienee kuitenkin GARCH(1,1).

Viitteet

[1] Bollerslev, T. (1986): Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* **31**, 307–327.

[2] Diebold, F. X. (2004): The Nobel Memorial Prize for Robert F. Engle, *Scandinavian Journal of Economics*, ilmestyy.

[3] Engle, R. (1982): Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, *Econometrica* **50**, 987–1008.

[4] Granger, C. W. J. ja Anderson, A. (1978): *An Introduction to Bilinear Time Series Models.* Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

[5] Mandelbrot, B. (1963): The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business* **36**, 394–419.

[6] Salminen, P. ja Valkeila, E. (1999): Black-Scholesin kaava: rahoitusteorian peruselementti, *Arkhimedes* **3**, 21–24.

[7] Wold, H. O. (1938): *A Study in the Analysis of Stationary Time Series.* Almqvist & Wiksells, Uppsala.