Tommi Sottinen

BS-kaava ja lama

Lama 2007–

"Countries don't owe money to each other, countries owe money to banks. If the countries owe money to banks how stupid are the countries to pay. Like the country has an army. The bank has four cashiers and a cleaning lady."

Näin sanoi **Ismo Leikola**, maailman hauskin henkilö vuonna 2014. Palaan tähän vitsiin kirjoitukseni lopussa. Muuten kirjoitukseni käsittelee johdannaisia ja erityisesti niin sanottua BS-kaavaa ja sen roolia mm. vuonna 2007 alkaneessa ja yhä riehuvassa finanssikriisissä. Yritän argumentoida, että kriisin syy ei ole BS, eli johdannaisten hinnoittelukaava, jonka **Fischer Black** ja **Myron Scholes** esittivät vuonna 1973 julkaisussaan [2]. Tai jos onkin, niin sitä syytetään aivan virheellisesti.

Kirjoitukseni lopuksi esitän röyhkeästi oman nöyrän näkemykseni kärsimämme laman pääsyyllisestä.

Matematiikka finanssikriisin syyllisenä

Nykyinen finanssikriisimme alkoi asuntoluotoista ja niihin liitetyistä johdannaisista Yhdysvalloissa vuonna 2007. Sitten romahtivat Islannin pankit vuonna 2008. EU:ssa oli jo aiemminkin ongelmia monien valtioiden velkojen kanssa, mutta vasta 2010 Kreikan velat läsähtivät tapetille. Monia muitakin skandaaleja on nähty vuosien 2007 ja 2014 välillä, ja varmaan on lisää tulossa.

Johdannaisia on esitetty laman syyksi. Erityisesti on kritisoitu niihin liittyvää matematiikkaa, kuten BS-kaavaa (11) esimerkiksi lehtiartikkelissa [8] sekä **David X. Lin** niin sanottua gaussista kopulakaavaa lehtiartikkelissa [6]. Kopulakaavaa en puolusta, mutta BS-kaavaa kylläkin.

Johdannaiset ja BS-kaava

Rahoituksessa johdannaisella tarkoitetaan arvopaperia, jonka arvo määräytyy, eli on johdettu, jonkin kohde-etuuden mukaan. Tässä kirjoituksessa tarkastelemme vain niin sanottuja eurooppalaisia vaniljaoptioita. Matemaattisesti kyseessä on tällöin arvopaperi, jonka arvo juoksuajan T jälkeen on $f(S_T)$, missä S_T on kohde-etuuden arvo juoksuajan T jälkeen.

Esimerkiksi osto-optiolle $f(S) = (S - K)^+$. Toisin sanoen osto-option haltija voi juoksuajan T päätyttyä ostaa kohde-etuuden lunastushinnalla K. Jos kohde-etuuden hinta juoksuajan päätyttyä, eli S_T, on korkeampi kuin lunastushinta K, niin osto-option haltijan voitto on $S_T - K$. Muussa tapauksessa osto-optio on arvoton.

Kuinka sitten johdannaiset, kuten vaikkapa osto-optio, tulee hinnoitella? Vastauksen kysymykseen antoivat Black ja Scholes [2]. Heidän hinnoitteluperiaate on suojaaminen seuraavilla niin sanotuilla BS-markkinoilla.

Olettakaamme, että meillä on kaksi hyödykettä.

Ensimmäinen hyödyke on raha tai yleisemmin numeraari. Tälle käytetään symbolia B kuten *bond*.

Kirjoittaja Tommi Sottinen on talousmatematiikan professori Vaasan yliopistossa.

Numeräärі on riskitön, hillitysti käyttäytyvä ja toteuttaa dynamiikan

$$dB = rB\,dt \qquad (1)$$

Hillitysti käyttäytyvä tarkoittaa tässä sitä, että DY:n (1) ratkaisu on se, minkä me kaikki koulussa opimme ja minkä jokainen asuntolainainen tietää:

$$B_t = B_0 e^{rt}. \qquad (2)$$

Riskittömyys tarkoittaa sitä, että r on deterministinen, mutta tällä ei ole mitään merkitystä: r voisi ihan yhtä hyvin olla stokastinenkin. Itse asiassa B:n ei tarvitsisi olla edes hillitysti käyttäytyvä, mutta klassisesti näin oletetaan, joten en tässä tee triviaalia yleistystä.

Toinen hyödyke on kohde-etuus. Tälle käytetään symbolia S kuten *stock*. Kohde-etuus käyttäytyy hillittömästi ja on stokastinen. Klassisesti oletetaan, että se toteuttaa dynamiikan

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW, \qquad (3)$$

missä W on Brownin liike. Tällöin DY:n (3) ratkaisu saadaan Itô-kalkyylillä ja se on viettävä geometrinen Brownin liike

$$St = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma Wt}. \qquad (4)$$

Itô-kalkyyli tarkoittaa tässä Itôn kaavaa, eli toisen kertaluvun (Taylorin mielessä) muuttujanvaihtokaavaa

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial W}dW + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial W^2}(dW)^2, \qquad (5)$$

missä $F = F(t, W)$ ja Brownin liikkeen *neliöheilahtelulle* pätee

$$(dW)^2 = dt. \qquad (6)$$

Kohde-etuuden määräävän DY:n (3) ratkaisu (4) seuraa siis Itôn kaavasta (5) yhdistettynä Brownin liikkeen neliöheilahteluun (6).

Entä sitten johdannaisen hinta? Paradigmana on niin sanottu *suojausperiaate*. Johdannaisen myyjä saa myydessään pääoman v. Tämän pääoman myyjä sijoittaa BS-markkinoilla noudattaen strategiaa (Π_B, Π_S), missä $\Pi_B = \Pi_B(t, S)$ ja $\Pi_S = \Pi_S(t, S)$ tarkoittavat kuinka paljon johdannaisen myyjä ostaa tai myy numeraäriä B ja kohde-etuutta S juoksuajan hetkellä t. Sijoituksen tulee olla *omavarainen*. Toisin sanoen kaikki sijoitettava varallisuus tulee johdannaisen myynnistä saadusta alkupääomasta ja sijoituskohteiden arvojen muutoksesta. Matemaattisesti tämä tarkoittaa budjettirajoitusta

$$dV = \Pi_B\,dB + \Pi_S\,dS, \qquad (7)$$

missä $V = V(t, S)$ on sijoitussalkun arvo juoksuajan hetkellä t, kun kohde-etuuden arvo on S. Suojausperiaate sanoo, että alkupääoma v on johdannaisen $f(S)$ oikea hinta, jos omavaraisuusehtoa (7) noudattavan sijoitussalkun (Π_B, Π_S) varallisuus toteuttaa

$$V(0, S_0) = v,$$
$$V(T, S_T) = f(S_T).$$

Miten tämä suojaushinta sitten lasketaan? Olkoon sijoitussalun arvo $V = V(t, S)$, missä S on annettu kaavalla (3). Tällöin Itô-kalkyyli antaa kaavan

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt, \qquad (8)$$

sillä kohde-etuuden S neliöheilahtelu on

$$\begin{aligned}(dS)^2 &= (\mu S\,dt + \sigma S\,dW)^2 \\ &= \mu^2 S^2 (dt)^2 + 2\mu S^2\sigma\,dt dW + \sigma^2 S^2 (dW)^2 \\ &= \sigma^2 S^2 (dW)^2 \\ &= \sigma^2 S^2\,dt.\end{aligned}$$

Yhdistämällä kaava (7) kaavaan (8) sekä sijoituskohteiden B ja S kaavoihin (2) ja (4) saamme BS:n takaperoisen ODY:n

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \qquad (9)$$

reunaehdolla

$$V(T,S_T)=f(S_T). \qquad (10)$$

ODY:n (9) reunaehdolla (10) voi ratkaista monellakin tavalla. Fyysikko varmaankin huomaisi yhteyden lämpöyhtälöön ja stokastikko käyttäisi varmaankin martingaaliteoriaa. Oli sitten ratkaisutapa mikä vaan, niin ratkaisu $V = V(t, S)$ on gaussinen integraali

$$V=e^{-r\theta}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\theta+\sigma\sqrt{\theta}x}\right)\gamma(\mathrm{d}x), \qquad (11)$$

missä $\theta = T - t$ on jäljellä oleva juoksuaika ja $\gamma(\mathrm{d}x)$ on standardigaussinen mitta

$$\gamma(\mathrm{d}x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Kaava (11) on se kuuluisa BS-kaava, joskin olen esittänyt sen tässä yleiselle eurooppalaiselle vaniljaoptiolle $f(S)$. Sen erikoistapausta eurooppalaiselle osto-optiolle $f(S)=(S-K)^+$ kutsutaan myös BS-kaavaksi.

Hinnoittelukaavan (11) voi tulkita myös satunnaismuuttujan f(S) diskontattuna gaussisena odotusarvona niin sanotun *riskineutraalin todennäköisyysmitan* suhteen. Tällainen tulkinta on esitetty mm. tämän lehden numerossa 3/99 [5]. Tämä on matemaattisesti miellyttävää, mutta muuten sääli. Riskineutraali todennäköisyysmitta on ainoastaan matemaattinen artefakti ja se johtaa harhaiseen intuitioon, kuten kohta perustelen.

BS-kaavan kritiikki

BS-kaavaa on kritisoitu mm. siksi, että se olettaa, että

1. ostaa ja myydä voi jatkuva-aikaisesti,
2. markkinoilla ei ole kitkaa, eli transaktiokuluja,
3. kohde-etuutta voi ostaa ja myydä rajattomasti, esimerkiksi lyhyeksi myynti on sallittua,
4. osto-ja myyntikorko on kaikille sama,
5. suojausostot tai -myynnit eivät vaikuta kohde-etuuden hintoihin,
6. volatiliteetti on vakio,
7. **logaritmiset tuotot ovat riippumattomia**,
8. **logaritmiset tuotot ovat normaalisti jakautuneita**.

Kritiikit 1–5 ovat toki perusteltuja, mutta eivät kriittisiä. BS-malli on näiltä osin idealisoitu malli, joka kuvaa todellisuutta varsin usein riittävällä tarkkuudella ja lisäksi käytännössä on helppoa ja ilmeistä nähdä nämä rajoitukset ja sopeutua niihin asiaan kuuluvalla tavalla. Kritiikki 6 on sikäli asiaton, että käytännössä käytetään BS-mallin versioita, joissa volatiliteetti ei ole vakio. Tällöin matematiikasta tulee hieman sotkuisempaa, mutta periaate on täysin sama kuin vakiovolatiliteettisessakin BS-mallissa.

Kritiikit 7–8 ovat olleet julkisuuden eniten esillä. Ne periaatteessa olisivatkin oleellisia BS-kaavan ongelmia, sillä niistä johtuisi että BS-kaava mallintaa kohde-etuutta fundamentaalisti väärällä tavalla. Kritiikit 7–8 ovat kuitenkin täysin asiattomia ja johtunevat siitä, että BS-kaava johdetaan perinteisissä alan oppikirjoissa täysin onnettomalla tavalla. Seuraavassa osiossa ”johdamme” BS-kaavan niin, että kritiikeiltä 7–8 putoaa pohja täysin.

BS-kaavan apologia

BS-kaava johdetaan perinteisesti edellä esitetyllä tavalla lähtien liikkeelle geometrisesta Brownin liikkeestä. Tästä lähtökohdasta kritiikit 7–8 ovat perusteltuja. Mutta BS-kaavan voi johtaa myös vetoamatta ollenkaan Brownin liikkeeseen. Nimittäin **Hans Föllmer** huomasi artikkelissaan [3], että Itôn kaava (5) pätee mille tahansa jatkuvalle polulle W, jolle vain neliöheilahtelu $(\mathrm{d}W)^2$ on olemassa. *Stokastiikalla ei ole mitään tekemistä asian kanssa!* Föllmerin johto Itôn kaavalle oli äärimmäisen yksinkertainen: hän käytti ainoastaan toisen kertaluvun Taylorin kaavaa ja oletti *a priori* neliöheilahtelun olemassaolon. Tämä poikkeaa perinteisestä Itôn kaavan perustelusta ainoastaan siinä, että neliöheilahtelun olemassaolo oletettiin; Brownin liikkeelle neliöheilahtelun olemassaolo voidaan todistaa. Teknisesti siis ei tapahtunut suurtakaan muutosta, mutta ajattelutavan muutos oli radikaali: niin radikaali, että se edelleen lähes loistaa poissaolollaan moderneissakin stokastisen analyysin tai matemaattisen rahoitusteorian oppikirjoissa.

Ensimmäisenä tätä Föllmerin huomiota sovelsivat johdannaisten hinnoitteluun **John Schoenmakers** ja **Peter Kloeden** artikkelissaan [7] ja myöhemmin tämä neliöheilahtelulähestymistapa sovitettiin matemaattisen rahoitusteorian ortodoksiaan artikkelissa [1].

Näin ollen BS-kaava (11) pätee, jos ja vain jos kohdeetuuden S neliöheilahtelu toteuttaa DY:n

$$(\mathrm{d}S)^2 = \sigma^2 S^2 \,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Tällaisia malleja on paljon. On esimerkiksi täysin mahdollista, että kohde-etuuden S logaritmiset tuotot ovat riippuvia toisistaan ja paljon paksuhäntäisempiä, kuin normaalijakauma, mutta silti neliöheilahtelu on sama kuin Brownin liikkeellä. Itse asiassa (melkein) mille tahansa jakaumalle voidaan rakentaa stokastinen malli, jonka poluille pätee (12).

Finanssikriisin todellinen syyllinen: oma spekulaationi

Esitän lopuksi oman yksinkertaistetun ja poleemisen näkemykseni finanssikriisin keskeisimmästä syystä.

Johdannaiskaupalla on epäilemättä osuutensa finanssikriisiin jo pelkästään laajuutensa vuoksi: jossain on arvioitu, että johdannaiskaupan volyymi esimerkiksi vuonna 2010 oli 600 biljoonaa dollaria. En tiedä, miten arvio on tehty, enkä osaa ottaa kantaa edes sen suuruusluokkaan. Kohtalaisen kohtuuttomasta summasta lienee kuitenkin kyse. Lisäksi johdannaissopimukset usein ovat varsin monimutkaisia. Sen sijaan, että olisi annettu funktio $f(S)$, voi sopimus olla 200 sivua lakimiesjargonia. En usko, että tällaisia sopimuksia on hinnoiteltu alkuunkaan oikein. En edes usko, että niihin voi soveltaa suojausperiaatetta. Vieläpä on niin, että johdannaiset mahdollistavat ostaa palovakuutuksen yhden naapurin saunaan ja samalla myydä toisen naapurin pyromaanille tulitikkuja, ainakin kuvaannollisesti. En tietenkään väitä, että näin olisi tehty. Johdannaisten puolustukseksi on sanottava, että ne myös mahdollistavat suojautumisen riskiä vastaan ja yleisemmin riskitason säätämisen itselleen sopivaksi.

Oma näkemykseni kuitenkin on, että nykyinen finanssikriisi tai lama on ennen kaikkea *velkakriisi*, joka johtuu rahan luonteesta. Nimittäinen rahajärjestelmämme on pyramidihuijaus. Toisin kuin yleisesti luullaan rahaa ei tehdä keskuspankeissa ja pankit eivät lainaa heillä olevaa rahaa. Tosiasiassa pankit luovat lainaamansa rahan tyhjästä [4]. Tämän rahan ne sitten vaativat takaisin korkojen kera. Koska lähes kaikki raha kuitenkin luodaan lainatessa, niin korkorahaa ei luoda juuri missään. Tämä johtaa velkapyramidiin.

Kuinka sitten pankeilta voi loppua raha? Siten että pankit, vaikkakin luovat rahan tyhjästä, eivät voi luoda sitä loputtomasti. Koska korkorahoja ei lähtökohtaisesti luoda tyhjästä, ja pyramidia ei voi rakentaa loputtomiin, seuraa luottotappioita. Nämä vaikuttavat pankin taseeseen niin, että enää sen ei ole sallittua luoda rahaa tyhjästä. Tällöin keskuspankit astuvat kuvaan ja antavat pankeille lisää rahaa, tai pikemminkin rahanluontivaltaa. Tämä ei kuitenkaan näytä auttavan: korot ovat alhaalla, eli rahaa on tarjolla, mutta kuluttajat (valtiot mukaan lukien!) ovat korviaan myöten veloissa. Siten he eivät halua ottaa enää lisää velkaa. Pyramidi on saavuttanut saturaatiopisteen; ainakin Euroopassa. Yhdysvalloissa keskuspankki on tunkenut markkinoille niin paljon rahaa, että pyramidin rakentaminen on päässyt jatkumaan.

Minulla ei tietenkään ole ratkaisua lamaan, mutta saattaisi olla parempi, jos keskuspankit eivät jakaisi rahaa yksityisille pankeille, vaan sirottelisivat rahaa *mustista helikoptereista* asutuskeskusten yllä. Saksalle tämä ei taida sopia, koska sillä muutenkin menee hyvin ja 1920-luvun haamuista ei ole päästy vieläkään eroon.

Viitteet

[1] **Bender, C., Sottinen, T**. ja **Valkeila, E.** (2008) Pricing by hedging and no-arbitrage beyond semi-martingales. *Finance Stoch*. **12**, 441–468.

[2] **Black, F.** ja **Scholes, M.** (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *J. Political Economy* **81**, 637–659.

[3] **Föllmer, H**. (1981) Calcul d'Itô sans probabilités. *Séminaire de Probabilités* **XV**, 143–150.

[4] **Kauko, K.** (2011) Lyhyt johdatus rahaan, *BoF Online* **5**, http://www.suomenpankki.fi/pdf/169229.pdf

[5] **Salminen, P**. ja **Valkeila, E**. (1999) Matemaattisen rahoitusteorian peruselementti: Black–Scholesin kaava. *Arkhimedes* 3/99, 21–24.

[6] **Salmon, F**. (2009) Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street. Wired Magazine 17.03, http://archive.wired.com/techbiz/it/magazine/17-03/wp_quant?currentPage=all

[7] **Schoenmakers, J**. ja **Kloeden, P**. (1999) Robust option replication for a Black-Scholes model extended with nondeterministic trends. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **12**, no. 2, 113–120.

[8] **Stewart, I.** (2012) The mathematical equation that caused the banks to crash. *The Guardian*, Sunday 12 February 2012, http://www.theguardian.com/science/2012/feb/12/black-scholes-equation-credit-crunch