Black–Scholes-hinnoittelumallin robustisuus ja tyylitellyt tosiseikat

Tommi Sottinen, Helsingin yliopisto

Yhteistyössä

C. Bender, TU Braunschweig

E. Valkeila, Teknillinen korkeakoulu

10. lokakuuta 2006

UNIVERSITAS HELSINGIENSIS

Sisältö

Sisältö

UNIVERSITAS HELSINGIENSIS

Sisältö

Sisältö

Sisältö

1. Arbitraasihinnoittelun perusteita
2. Black–Scholes-hinnoittelumalli
3. Malliluokka
4. Tavoite
5. Sallitut strategiat

Sisältö

1. Arbitraasihinnoittelun perusteita
2. Black–Scholes-hinnoittelumalli
3. Malliluokka
4. Tavoite
5. Sallitut strategiat
6. Etuperäinen integrointi

Sisältö

Sisältö

Sisältö

1. Arbitraasihinnoittelun perusteita
2. Black–Scholes-hinnoittelumalli
3. Malliluokka
4. Tavoite
5. Sallitut strategiat
6. Etuperäinen integrointi
7. Tulos arbitraasivapaudesta
8. Tulos suojausten robustisuudesta
9. Neliöheilahtelu ja volatiliteetti

Sisältö

1. Arbitraasihinnoittelun perusteita
2. Black–Scholes-hinnoittelumalli
3. Malliluokka
4. Tavoite
5. Sallitut strategiat
6. Etuperäinen integrointi
7. Tulos arbitraasivapaudesta
8. Tulos suojausten robustisuudesta
9. Neliöheilahtelu ja volatiliteetti
10. Laajennuksia

1. Arbitraasihinnoittelun perusteita (1/2)

Osakeprosessi, omavaraiset strategiat ja niiden arvo

- Diskontattu markkinamalli on viisikko $(\Omega, \mathcal{F}, (S_t), (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$. Osakeprosessi S saa arvoja avaruudessa $\mathcal{C}_{s_0,+}$ (jatkuvat positiiviset polut $[0, T]$:n yli, jotka lähtevät liikkeelle s_0:sta).

- Diskontattu markkinamalli on viisikko $(\Omega, \mathcal{F}, (S_t), (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$. Osakeprosessi S saa arvoja avaruudessa $\mathcal{C}_{s_0,+}$ (jatkuvat positiiviset polut $[0, T]$:n yli, jotka lähtevät liikkeelle s_0:sta).
- Ennustettava strategia Φ on omavarainen, jos sen arvolle pätee

$$V_t(\Phi, v_0; S) = v_0 + \int_0^t \Phi_t \, \mathrm{d}S_t.$$

Tässä v_0 on alkuvarallisuus.
Taloudellinen käsite 'omavaraisuus' eli 'budjettirajoitus' vastaa Itô-integraalin 'eteenpäin-konstruktiota'.

- Strategia Φ on arbitraasi (free lunch), jos

$$\mathbf{P}\left[V_T(\Phi, 0; S) \geq 0\right] = 1 \quad \text{ja} \quad \mathbf{P}\left[V_T(\Phi, 0; S) > 0\right] > 0.$$

- Strategia Φ on arbitraasi (free lunch), jos

$$\mathbf{P}\left[V_T(\Phi, 0; S) \geq 0\right] = 1 \quad \text{ja} \quad \mathbf{P}\left[V_T(\Phi, 0; S) > 0\right] > 0.$$

- Tehokkaiden markkinoiden hypoteesi: Ei arbitraasia.

- Strategia Φ on arbitraasi (free lunch), jos

$$\mathbf{P}\left[V_T(\Phi, 0; S) \geq 0\right] = 1 \quad \text{ja} \quad \mathbf{P}\left[V_T(\Phi, 0; S) > 0\right] > 0.$$

- Tehokkaiden markkinoiden hypoteesi: Ei arbitraasia.
- Rahoitusteorian päälause: Ei arbitraasia joss on olemassa ekvivalentti martingaalimitta.

1. Arbitraasihinnoittelun perusteita (2/2)

Arbitraasi ja suojaus (toistaminen)

- Strategia Φ on arbitraasi (free lunch), jos

$$\mathbf{P}\left[V_T(\Phi, 0; S) \geq 0\right] = 1 \quad \text{ja} \quad \mathbf{P}\left[V_T(\Phi, 0; S) > 0\right] > 0.$$

- Tehokkaiden markkinoiden hypoteesi: Ei arbitraasia.
- Rahoitusteorian päälause: Ei arbitraasia joss on olemassa ekvivalentti martingaalimitta.
- Seuraus: Jos S ei ole semimartingaali, mallissa on arbitraasia.

- Strategia Φ on arbitraasi (free lunch), jos

$$\mathbf{P}\left[V_T(\Phi, 0; S) \geq 0\right] = 1 \quad \text{ja} \quad \mathbf{P}\left[V_T(\Phi, 0; S) > 0\right] > 0.$$

- Tehokkaiden markkinoiden hypoteesi: Ei arbitraasia.
- Rahoitusteorian päälause: Ei arbitraasia joss on olemassa ekvivalentti martingaalimitta.
- Seuraus: Jos S ei ole semimartingaali, mallissa on arbitraasia.
- Optio on kuvaus $G : \mathcal{C}_{s_0,+} \to \mathbb{R}$. Sen suojaus on strategia Φ, jolle pätee

$$G(S) = V_T(\Phi, v_0; S).$$

  Option G toistohinta on suojauksen Φ alkuvarallisuus v_0. Alkupääoma v_0 on yksikäsitteinen: muuten mallissa olisi arbitraasia.

2. Black–Scholes-hinnoittelumalli

- Niin sanotun ekvivalentin martingaalimitan suhteen

$$S_t = s_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t},$$

missä W on Brownin liike.

UNIVERSITAS HELSINGIENSIS

2. Black–Scholes-hinnoittelumalli

- Niin sanotun ekvivalentin martingaalimitan suhteen

$$S_t = s_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t},$$

  missä W on Brownin liike.
- Mallissa ei ole arbitraasia ja kaikki optiot voidaan suojata.

UNIVERSITAS HELSINGIENSIS

2. Black–Scholes-hinnoittelumalli

- Niin sanotun ekvivalentin martingaalimitan suhteen

$$S_t = s_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t},$$

  missä W on Brownin liike.
- Mallissa ei ole arbitraasia ja kaikki optiot voidaan suojata.
- Mallin mukaan logaritmiset tuotot

$$R_t = \log \frac{S_t}{S_{t-\Delta t}} = \sigma \Delta W_t - \frac{\sigma^2}{2} \Delta t$$

  ovat riippumattomia ja normaalisti jakautuneita.

2. Black–Scholes-hinnoittelumalli

- Niin sanotun ekvivalentin martingaalimitan suhteen

$$S_t = s_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t},$$

  missä W on Brownin liike.
- Mallissa ei ole arbitraasia ja kaikki optiot voidaan suojata.
- Mallin mukaan logaritmiset tuotot

$$R_t = \log \frac{S_t}{S_{t-\Delta t}} = \sigma \Delta W_t - \frac{\sigma^2}{2} \Delta t$$

  ovat riippumattomia ja normaalisti jakautuneita.
- Käytännössä havaitsemme log-tuottoja, jotka eivät ole kumpaakaan. Lisäksi havaitsemme sellaisia tyyliteltyjä tosiseikkoja, jotka eivät voi seurata mistään semimartingaalimallista.

3. Malliluokka (1/2)

Määrittely ja poluttainen neliöheilahtelu

- Tarkastelemme malliluokkaa, joka määräytyy osakekurssin poluittaisesta neliöheilahtelusta:

$$\langle S \rangle_t = \text{m.v.-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left(S_{\frac{k}{2^n} T \wedge t} - S_{\frac{k-1}{2^n} T \wedge t} \right)^2 .$$

3. Malliluokka (1/2)

- Tarkastelemme malliluokkaa, joka määräytyy osakekurssin poluittaisesta neliöheilahtelusta:

$$\langle S \rangle_t = \text{m.v.-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left(S_{\frac{k}{2^n} T \wedge t} - S_{\frac{k-1}{2^n} T \wedge t} \right)^2 .$$

- $(\Omega, \mathcal{F}, (S_t), (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ kuuluu malliluokkaan $\mathcal{M}_\sigma$ jos

3. Malliluokka (1/2)

Määrittely ja poluttainen neliöheilahtelu

- Tarkastelemme malliluokkaa, joka määräytyy osakekurssin poluittaisesta neliöheilahtelusta:

$$\langle S \rangle_t = \text{m.v.-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left(S_{\frac{k}{2^n} T \wedge t} - S_{\frac{k-1}{2^n} T \wedge t} \right)^2 .$$

- $(\Omega, \mathcal{F}, (S_t), (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ kuuluu malliluokkaan $\mathcal{M}_\sigma$ jos
  1. S saa arvoja joukossa $\mathcal{C}_{s_0,+}$ (jatkuvuus),

3. Malliluokka (1/2)

Määrittely ja poluttainen neliöheilahtelu

- Tarkastelemme malliluokkaa, joka määräytyy osakekurssin poluittaisesta neliöheilahtelusta:

$$\langle S \rangle_t = \text{m.v.-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left(S_{\frac{k}{2^n} T \wedge t} - S_{\frac{k-1}{2^n} T \wedge t} \right)^2 .$$

- $(\Omega, \mathcal{F}, (S_t), (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ kuuluu malliluokkaan $\mathcal{M}_\sigma$ jos
  1. S saa arvoja joukossa $\mathcal{C}_{s_0,+}$ (jatkuvuus),
  2. poluittainen neliöheilahtelu on muotoa

$$\mathrm{d}\langle S \rangle_t \;=\; \sigma^2 S_t^2 \,\mathrm{d}t,$$

3. Malliluokka (1/2)

Määrittely ja poluttainen neliöheilahtelu

- Tarkastelemme malliluokkaa, joka määräytyy osakekurssin poluittaisesta neliöheilahtelusta:

$$\langle S\rangle_t = \text{m.v.-}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left(S_{\frac{k}{2^n}T\wedge t} - S_{\frac{k-1}{2^n}T\wedge t}\right)^2 .$$

- $(\Omega, \mathcal{F}, (S_t), (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ kuuluu malliluokkaan $\mathcal{M}_\sigma$ jos
  1. S saa arvoja joukossa $\mathcal{C}_{s_0,+}$ (jatkuvuus),
  2. poluittainen neliöheilahtelu on muotoa

$$\mathrm{d}\langle S\rangle_t \;=\; \sigma^2 S_t^2\,\mathrm{d}t,$$

  3. kaikille $\varepsilon > 0$ ja $\eta \in \mathcal{C}_{s_0,+}$ pätee pikkupallo-ominaisuus

$$\mathbf{P}\left[\|S-\eta\|_\infty < \varepsilon\right] > 0$$

eli $\operatorname{supp}\mathbf{P}\circ S^{-1} = \mathcal{C}_{s_0,+}$.

3. Malliluokka (2/2)

Esimerkkejä ja tyyliteltyjä tosiseikkoja

Malliluokkaan $\mathcal{M}_\sigma$ kuuluu mikä tahansa malli

$$S_t = s_0 e^{\sigma W_t + \frac{\sigma^2}{2} t + Z_t},$$

missä $Z = Z' + Z''$, missä Z' riippumaton W:stä ja Z'' on konstruoitu W:stä; $Z_0 = 0$, Z on jatkuva, toteuttaa pikkupalloehdon ja $\langle Z \rangle = 0$.

Valitsemalla sopivan Z:n saamme tyyliteltyjä tosiseikkoja:

Malliluokkaan $\mathcal{M}_\sigma$ kuuluu mikä tahansa malli

$$S_t = s_0 e^{\sigma W_t + \frac{\sigma^2}{2} t + Z_t},$$

missä $Z = Z' + Z''$, missä Z' riippumaton W:stä ja Z'' on konstruoitu W:stä; $Z_0 = 0$, Z on jatkuva, toteuttaa pikkupalloehdon ja $\langle Z \rangle = 0$.

Valitsemalla sopivan Z:n saamme tyyliteltyjä tosiseikkoja:

- Pitkän aikavälin riippuvuus: Z on fraktionaalinen Brownin liike varianssilla δ^2 ja Hurstin indeksillä $H > \frac{1}{2}$. Tällöin log-tuottojen autokovarianssi on asymptoottisesti muotoa

$$H(2H-1)\delta^2 \cdot n^{2H-2}.$$

Malliluokkaan $\mathcal{M}_\sigma$ kuuluu mikä tahansa malli

$$S_t = s_0 e^{\sigma W_t + \frac{\sigma^2}{2} t + Z_t},$$

missä $Z = Z' + Z''$, missä Z' riippumaton W:stä ja Z'' on konstruoitu W:stä; $Z_0 = 0$, Z on jatkuva, toteuttaa pikkupalloehdon ja $\langle Z \rangle = 0$.

Valitsemalla sopivan Z:n saamme tyyliteltyjä tosiseikkoja:

- Pitkän aikavälin riippuvuus: Z on fraktionaalinen Brownin liike varianssilla δ^2 ja Hurstin indeksillä $H > \frac{1}{2}$. Tällöin log-tuottojen autokovarianssi on asymptoottisesti muotoa

$$H(2H-1)\delta^2 \cdot n^{2H-2}.$$

- Paksut hännät: Z on integroitu yhdistetty Poisson-prosessi paksuhäntäisellä hyppyjakaumalla.

Malliluokkaan $\mathcal{M}_\sigma$ kuuluu mikä tahansa malli

$$S_t = s_0 e^{\sigma W_t + \frac{\sigma^2}{2} t + Z_t},$$

missä $Z = Z' + Z''$, missä Z' riippumaton W:stä ja Z'' on konstruoitu W:stä; $Z_0 = 0$, Z on jatkuva, toteuttaa pikkupalloehdon ja $\langle Z \rangle = 0$.

Valitsemalla sopivan Z:n saamme tyyliteltyjä tosiseikkoja:

- Pitkän aikavälin riippuvuus: Z on fraktionaalinen Brownin liike varianssilla δ^2 ja Hurstin indeksillä $H > \frac{1}{2}$. Tällöin log-tuottojen autokovarianssi on asymptoottisesti muotoa

$$H(2H-1)\delta^2 \cdot n^{2H-2}.$$

- Paksut hännät: Z on integroitu yhdistetty Poisson-prosessi paksuhäntäisellä hyppyjakaumalla.
- (Melkein) mikä tahansa autokovarianssi: Z on jatkuva 0-neliövariaatioprosessi ja (W, Z) yhteisnormaalisti jakautunut.

4. Tavoite

Jopa Black–Scholes-mallissa joudumme rajoittamaan hyväksyttäviä strategioita: mikä tahansa ennustettava omavarainen strategia ei kelpaa (esimerkiksi tuplausstrategiat pitää sulkea pois).

Etsimme luokan sallittuja strategioita, joka on

4. Tavoite

Jopa Black–Scholes-mallissa joudumme rajoittamaan hyväksyttäviä strategioita: mikä tahansa ennustettava omavarainen strategia ei kelpaa (esimerkiksi tuplausstrategiat pitää sulkea pois).

Etsimme luokan sallittuja strategioita, joka on

(i) riittävän pieni sulkemaan arbitraasin pois,

4. Tavoite

Jopa Black–Scholes-mallissa joudumme rajoittamaan hyväksyttäviä strategioita: mikä tahansa ennustettava omavarainen strategia ei kelpaa (esimerkiksi tuplausstrategiat pitää sulkea pois).

Etsimme luokan sallittuja strategioita, joka on

(i) riittävän pieni sulkemaan arbitraasin pois,

(ii) riittävän suuri relevanttien optioiden suojaamiseen,

4. Tavoite

Jopa Black–Scholes-mallissa joudumme rajoittamaan hyväksyttäviä strategioita: mikä tahansa ennustettava omavarainen strategia ei kelpaa (esimerkiksi tuplausstrategiat pitää sulkea pois).

Etsimme luokan sallittuja strategioita, joka on

(i) riittävän pieni sulkemaan arbitraasin pois,

(ii) riittävän suuri relevanttien optioiden suojaamiseen,

(iii) taloudellisesti järkevä.

5. Sallitut strategiat

Strategia Φ on sallittu, jos

5. Sallitut strategiat

Strategia Φ on sallittu, jos

(i) se on muotoa

$$\Phi_t = \varphi\left(t, S_t, S_t^*, S_{*,t}, \bar{S}_t\right),$$

missä $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$,

$$S_t^* := \max_{r\in[0,t]} S_r, \quad S_{*,t} := \min_{r\in[0,t]} S_r, \quad \bar{S}_t := \int_0^t S_r \,\mathrm{d}r,$$

5. Sallitut strategiat

Strategia Φ on sallittu, jos

(i) se on muotoa

$$\Phi_t \;=\; \varphi\left(t, S_t, S_t^*, S_{*,t}, \bar{S}_t\right),$$

missä $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$,

$$S_t^* := \max_{r\in[0,t]} S_r, \quad S_{*,t} := \min_{r\in[0,t]} S_r, \quad \bar{S}_t := \int_0^t S_r \,\mathrm{d}r,$$

(ii) ja toteuttaa klassisen 'ei tuplausstrategioita' -ehdon

$$\int_0^t \Phi_r \,\mathrm{d}S_r \;\geq\; -a \qquad \mathbf{P} - \text{a.s}$$

kaikille $t \in [0,T]$ jollakin $a > 0$.

UNIVERSITAS HELSINGIENSIS

6. Etuperäinen integrointi

Emme voi käyttää Itô-integrointia, sillä tarkastelemme ei-semimartingaalimalleja. Voimme kuitenkin käyttää poluittaista etuperäistä integraalia.

6. Etuperäinen integrointi

Emme voi käyttää Itô-integrointia, sillä tarkastelemme ei-semimartingaalimalleja. Voimme kuitenkin käyttää poluittaista etuperäistä integraalia.

- $\int_0^t \Phi_r \mathrm{d}S_r$ on **P**-m.v. raja yli dyadisten ositusten (π_n):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_k\in\pi_n \\ t_k\le t}} \Phi_{t_{k-1}} \left(S_{t_k} - S_{t_{k-1}}\right).$$

6. Etuperäinen integrointi

Emme voi käyttää Itô-integrointia, sillä tarkastelemme ei-semimartingaalimalleja. Voimme kuitenkin käyttää poluittaista etuperäistä integraalia.

- $\int_0^t \Phi_r \mathrm{d}S_r$ on **P**-m.v. raja yli dyadisten ositusten (π_n):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_k\in\pi_n \\ t_k\le t}} \Phi_{t_{k-1}} \left(S_{t_k} - S_{t_{k-1}}\right).$$

- Olkoon $u \in \mathcal{C}^{1,2,1}([0,T], \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ ja $Y^1, \ldots, Y^m$ rajoitetusti heilahtelevia ja jatkuvia. Jos S:llä on poluittainen neliöheilahtelu, niin $u(t, S_t, Y_t^1, \ldots, Y_t^m)$:lle pätee Itôn kaava

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}\langle S\rangle + \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial y_i}\mathrm{d}Y^i.$$

  Tästä voimme myös päätellä etuperäisen integraalin olemassaolon ja jatkuvuuden.

UNIVERSITAS HELSINGIENSIS

7. Tulos arbitraasivapaudesta (1/2)

Lause AV *Sallituilla strategioilla ei voi tehdä arbitraasia.*

7. Tulos arbitraasivapaudesta (1/2)

Lause AV *Sallituilla strategioilla ei voi tehdä arbitraasia.*

Todistuksen idea: Asetetaan

$$
\begin{aligned}
v(t,\eta;\varphi) \quad := \quad & u(t,\eta(t),\eta^*(t),\eta_*(t),\bar{\eta}(t)) \\
& -\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(r,\eta(r),\eta^*(r),\eta_*(r),\bar{\eta}(r))\,\mathrm{d}r \\
& -\int_0^t \frac{\partial u}{\partial y_1}(r,\eta(r),\eta^*(r),\eta_*(r),\bar{\eta}(r))\,\mathrm{d}\eta^*(r) \\
& -\int_0^t \frac{\partial u}{\partial y_2}(r,\eta(r),\eta^*(r),\eta_*(r),\bar{\eta}(r))\,\mathrm{d}\eta_*(r) \\
& -\int_0^t \frac{\partial u}{\partial y_3}(r,\eta(r),\eta^*(r),\eta_*(r),\bar{\eta}(r))\,\mathrm{d}\bar{\eta}(r) \\
& -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(r,\eta(r),\eta^*(r),\eta_*(r),\bar{\eta}(r))\,\sigma^2\eta(r)^2\,\mathrm{d}r,
\end{aligned}
$$

missä

$$
u(t,x,y_1,y_2,y_3) \quad = \quad \int_{s_0}^t \varphi(t,\xi,y_1,y_2,y_3)\,\mathrm{d}\xi.
$$

UNIVERSITAS HELSINGIENSIS

7. Tulos arbitraasivapaudesta (2/2)

Todistuksen idea

Itôn kaavasta saamme tällöin funktionaalisen yhteyden

$$V_t(\Phi, v_0; S) \;=\; v_0 + \int_0^t \Phi_t \, \mathrm{d}S_t \;=\; v_0 + v(t, S; \varphi).$$

7. Tulos arbitraasivapaudesta (2/2)

Todistuksen idea

Itôn kaavasta saamme tällöin funktionaalisen yhteyden

$$V_t(\Phi, v_0; S) \;=\; v_0 + \int_0^t \Phi_t \,\mathrm{d}S_t \;=\; v_0 + v(t, S; \varphi).$$

Lisäksi (tämä on keskeistä) varallisuusfunktionaali $v(t, \cdot; \varphi)$ on jatkuva sup-normissa.

7. Tulos arbitraasivapaudesta (2/2)

Todistuksen idea

Itôn kaavasta saamme tällöin funktionaalisen yhteyden

$$V_t(\Phi, v_0; S) \;=\; v_0 + \int_0^t \Phi_t \,\mathrm{d}S_t \;=\; v_0 + v(t, S; \varphi).$$

Lisäksi (tämä on keskeistä) varallisuusfunktionaali $v(t, \cdot; \varphi)$ on jatkuva sup-normissa.

Oletamme, että $V_T(\Phi, 0; S) = v(T, S; \varphi) \geq 0$ **P**-m.v. Pikkupalloehdon ja $v(t, \cdot; \varphi)$:n jatkuvuuden nojalla saamme funktionaalisen epäyhtälön $v(T, \eta; \varphi) \geq 0$ for all $\eta \in \mathcal{C}_{s_0,+}$.

7. Tulos arbitraasivapaudesta (2/2)

Todistuksen idea

Itôn kaavasta saamme tällöin funktionaalisen yhteyden

$$V_t(\Phi, v_0; S) \;=\; v_0 + \int_0^t \Phi_t \,\mathrm{d}S_t \;=\; v_0 + v(t, S; \varphi).$$

Lisäksi (tämä on keskeistä) varallisuusfunktionaali $v(t, \cdot; \varphi)$ on jatkuva sup-normissa.

Oletamme, että $V_T(\Phi, 0; S) = v(T, S; \varphi) \geq 0$ **P**-m.v. Pikkupalloehdon ja $v(t, \cdot; \varphi)$:n jatkuvuuden nojalla saamme funktionaalisen epäyhtälön $v(T, \eta; \varphi) \geq 0$ for all $\eta \in \mathcal{C}_{s_0,+}$.

Nyt voimme mennä Black–Scholes-malliin $\tilde{S}$ ja huomaamme, että $v(T, \tilde{S}; \varphi) \geq 0$ $\tilde{\mathbf{P}}$-m.v. Mutta klassiset argumentit kertovat meille, että tällöin $v(T, \tilde{S}; \varphi) = 0$ $\tilde{\mathbf{P}}$-m.v.

7. Tulos arbitraasivapaudesta (2/2)

Todistuksen idea

Itôn kaavasta saamme tällöin funktionaalisen yhteyden

$$V_t(\Phi, v_0; S) \;=\; v_0 + \int_0^t \Phi_t \,\mathrm{d}S_t \;=\; v_0 + v(t, S; \varphi).$$

Lisäksi (tämä on keskeistä) varallisuusfunktionaali $v(t, \cdot; \varphi)$ on jatkuva sup-normissa.

Oletamme, että $V_T(\Phi, 0; S) = v(T, S; \varphi) \geq 0$ $\mathbf{P}$-m.v. Pikkupalloehdon ja $v(t, \cdot; \varphi)$:n jatkuvuuden nojalla saamme funktionaalisen epäyhtälön $v(T, \eta; \varphi) \geq 0$ for all $\eta \in \mathcal{C}_{s_0,+}$.

Nyt voimme mennä Black–Scholes-malliin $\tilde{S}$ ja huomaamme, että $v(T, \tilde{S}; \varphi) \geq 0$ $\tilde{\mathbf{P}}$-m.v. Mutta klassiset argumentit kertovat meille, että tällöin $v(T, \tilde{S}; \varphi) = 0$ $\tilde{\mathbf{P}}$-m.v.

Väite seuraa nyt menemällä päättelyketjussa takaperin vaihtaen $\tilde{S}$:n ja S:n roolit. $\square$

8. Tulos suojausten robustisuudesta

Käyttämällä, kuten edellä, jatkuvuutta sup-normissa, funktionaalista yhteyttä ja pikkupalloehtoa saamme:

8. Tulos suojausten robustisuudesta

Käyttämällä, kuten edellä, jatkuvuutta sup-normissa, funktionaalista yhteyttä ja pikkupalloehtoa saamme:

Lause SR Olkoon optio $G : \mathcal{C}_{s_0,+} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Jos $G(\tilde{S})$ voidaan suojata Black-Scholes-mallissa sallitulla strategialla, niin $G(S)$ voidaan suojata jokaisessa $\mathcal{M}_\sigma$:n mallissa S sallitulla strategialla.

Lisäksi suojaukset ovat, osakepolun funktiona, riippumattomia mallista.

8. Tulos suojausten robustisuudesta

Käyttämällä, kuten edellä, jatkuvuutta sup-normissa, funktionaalista yhteyttä ja pikkupalloehtoa saamme:

Lause SR Olkoon optio $G : \mathcal{C}_{s_0,+} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Jos $G(\tilde{S})$ voidaan suojata Black-Scholes-mallissa sallitulla strategialla, niin $G(S)$ voidaan suojata jokaisessa $\mathcal{M}_\sigma$:n mallissa S sallitulla strategialla.

Lisäksi suojaukset ovat, osakepolun funktiona, riippumattomia mallista.

Seuraus ODY Black–Scholes-mallissa aasialaisten, eurooppalaisten ja amerikkalaisten optioden suojaus löyedetään ratkaisemalla Black–Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö. Nämä suojaukset pätevät kaikissa malleissa, joilla on pikkupallo-ominaisuus, ovat jatkuvia ja joiden poluttainen neliöheilahtelu on sama kun Black–Scholes-mallilla.

UNIVERSITAS HELSINGIENSIS

9. Neliöheilahtelu ja volatiliteetti
Saarnausta

- Suojaukset riippuvat vain neliöheilahtelusta.

9. Neliöheilahtelu ja volatiliteetti
Saarnausta

- Suojaukset riippuvat vain neliöheilahtelusta.
- Neliöheilahtelu on polkuominaisuus. Se ei kerro mitään osakeprosessin probabilistisista ominaisuuksista. Väitämme rohkasti, että todennäköisyydet ovat irrelevantteja optioiden hinnoittelun kannalta.

9. Neliöheilahtelu ja volatiliteetti
Saarnausta

- Suojaukset riippuvat vain neliöheilahtelusta.
- Neliöheilahtelu on polkuominaisuus. Se ei kerro mitään osakeprosessin probabilistisista ominaisuuksista. Väitämme rohkasti, että todennäköisyydet ovat irrelevantteja optioden hinnoittelun kannalta.
- Historiallinen ja johdettu volatiliteetti eivät useinkaan vastaa toisiaan. Tämä ei ole yllättävää: historiallinen volatiliteetti on log-tuottojen varianssin neliöjuuren estimaatti ja johdettu volatiliteetti on log-tuottojen neliöheilahtelun neliöjuuren estimaatti. Nämä ovat kaksi täysin eri käsitettä (vrt. sekoitettu fraktionaalinen Black–Scholes-malli).

9. Neliöheilahtelu ja volatiliteetti
Saarnausta

- Suojaukset riippuvat vain neliöheilahtelusta.
- Neliöheilahtelu on polkuominaisuus. Se ei kerro mitään osakeprosessin probabilistisista ominaisuuksista. Väitämme rohkasti, että todennäköisyydet ovat irrelevantteja optioden hinnoittelun kannalta.
- Historiallinen ja johdettu volatiliteetti eivät useinkaan vastaa toisiaan. Tämä ei ole yllättävää: historiallinen volatiliteetti on log-tuottojen varianssin neliöjuuren estimaatti ja johdettu volatiliteetti on log-tuottojen neliöheilahtelun neliöjuuren estimaatti. Nämä ovat kaksi täysin eri käsitettä (vrt. sekoitettu fraktionaalinen Black–Scholes-malli).
- Alä käytä historiallista volatiliteettia!

10. Laajennuksia

(a) Voimme tarkastella neliöheilahtelufunktioita, jotka ovat muotoa $\sigma(t, S_t)$. Pikkupalloehdosta tulee vain vaikeampi.

10. Laajennuksia

(a) Voimme tarkastella neliöheilahtelufunktioita, jotka ovat muotoa $\sigma(t, S_t)$. Pikkupalloehdosta tulee vain vaikeampi.

(b) Juoksevan maksimin, minimin ja keskiarvon lisäksi voimme sallia faktoreita, jotka ovat muotoa $g : [0, T] \times \mathcal{C}_{s_0,+} \longrightarrow \mathbb{R}$:

10. Laajennuksia

(a) Voimme tarkastella neliöheilahtelufunktioita, jotka ovat muotoa $\sigma(t, S_t)$. Pikkupalloehdosta tulee vain vaikeampi.

(b) Juoksevan maksimin, minimin ja keskiarvon lisäksi voimme sallia faktoreita, jotka ovat muotoa $g : [0, T] \times \mathcal{C}_{s_0,+} \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. $g(t, \eta) = g(t, \tilde{\eta})$, kun $\eta(r) = \tilde{\eta}(r)$ aikavälillä $r \in [0, t]$,

10. Laajennuksia

(a) Voimme tarkastella neliöheilahtelufunktioita, jotka ovat muotoa $\sigma(t, S_t)$. Pikkupalloehdosta tulee vain vaikeampi.

(b) Juoksevan maksimin, minimin ja keskiarvon lisäksi voimme sallia faktoreita, jotka ovat muotoa $g : [0, T] \times \mathcal{C}_{s_0,+} \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. $g(t, \eta) = g(t, \tilde{\eta})$, kun $\eta(r) = \tilde{\eta}(r)$ aikavälillä $r \in [0, t]$,
2. $g(\cdot, \eta)$ on rajoitetusti heilahteleva ja jatkuva,

10. Laajennuksia

(a) Voimme tarkastella neliöheilahtelufunktioita, jotka ovat muotoa $\sigma(t, S_t)$. Pikkupalloehdosta tulee vain vaikeampi.

(b) Juoksevan maksimin, minimin ja keskiarvon lisäksi voimme sallia faktoreita, jotka ovat muotoa $g : [0, T] \times \mathcal{C}_{s_0,+} \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. $g(t, \eta) = g(t, \tilde{\eta})$, kun $\eta(r) = \tilde{\eta}(r)$ aikavälillä $r \in [0, t]$,
2. $g(\cdot, \eta)$ on rajoitetusti heilahteleva ja jatkuva,
3. $$\left| \int_0^t f(u) \mathrm{d}g(u, \eta) - \int_0^t f(u) \mathrm{d}g(u, \tilde{\eta}) \right| \leq K \| f \mathbf{1}_{[0,t]} \|_\infty \cdot \| \eta - \tilde{\eta} \|_\infty .$$

10. Laajennuksia

(a) Voimme tarkastella neliöheilahtelufunktioita, jotka ovat muotoa $\sigma(t, S_t)$. Pikkupalloehdosta tulee vain vaikeampi.

(b) Juoksevan maksimin, minimin ja keskiarvon lisäksi voimme sallia faktoreita, jotka ovat muotoa $g : [0, T] \times \mathcal{C}_{s_0,+} \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. $g(t, \eta) = g(t, \tilde{\eta})$, kun $\eta(r) = \tilde{\eta}(r)$ aikavälillä $r \in [0, t]$,
2. $g(\cdot, \eta)$ on rajoitetusti heilahteleva ja jatkuva,
3. $$\left| \int_0^t f(u)\mathrm{d}g(u, \eta) - \int_0^t f(u)\mathrm{d}g(u, \tilde{\eta}) \right| \leq K \|f \mathbf{1}_{[0,t]}\|_\infty \cdot \|\eta - \tilde{\eta}\|_\infty .$$

(c) ”Strategiafunktionaalin” φ riittää olla paloittain sileä.

10. Laajennuksia

(a) Voimme tarkastella neliöheilahtelufunktioita, jotka ovat muotoa $\sigma(t, S_t)$. Pikkupalloehdosta tulee vain vaikeampi.

(b) Juoksevan maksimin, minimin ja keskiarvon lisäksi voimme sallia faktoreita, jotka ovat muotoa $g : [0, T] \times \mathcal{C}_{s_0,+} \longrightarrow \mathbb{R}$:
1. $g(t, \eta) = g(t, \tilde{\eta})$, kun $\eta(r) = \tilde{\eta}(r)$ aikavälillä $r \in [0, t]$,
2. $g(\cdot, \eta)$ on rajoitetusti heilahteleva ja jatkuva,
3. $$\left| \int_0^t f(u) \mathrm{d}g(u, \eta) - \int_0^t f(u) \mathrm{d}g(u, \tilde{\eta}) \right| \le K \| f \mathbf{1}_{[0,t]} \|_\infty \cdot \| \eta - \tilde{\eta} \|_\infty .$$

(c) "Strategiafunktionaalin" φ riittää olla paloittain sileä.

(d) φ:n sileydestä pisteessä $t = T$ voidaan luopua (tätä tarvitaan jopa osto-option suojauksessa).

10. Laajennuksia

(a) Voimme tarkastella neliöheilahtelufunktioita, jotka ovat muotoa $\sigma(t, S_t)$. Pikkupalloehdosta tulee vain vaikeampi.

(b) Juoksevan maksimin, minimin ja keskiarvon lisäksi voimme sallia faktoreita, jotka ovat muotoa $g : [0, T] \times \mathcal{C}_{s_0,+} \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. $g(t, \eta) = g(t, \tilde{\eta})$, kun $\eta(r) = \tilde{\eta}(r)$ aikavälillä $r \in [0, t]$,
2. $g(\cdot, \eta)$ on rajoitetusti heilahteleva ja jatkuva,
3. $$\left| \int_0^t f(u) \mathrm{d}g(u, \eta) - \int_0^t f(u) \mathrm{d}g(u, \tilde{\eta}) \right| \leq K \| f \mathbf{1}_{[0,t]} \|_\infty \cdot \| \eta - \tilde{\eta} \|_\infty .$$

(c) "Strategiafunktionaalin" φ riittää olla paloittain sileä.

(d) φ:n sileydestä pisteessä $t = T$ voidaan luopua (tätä tarvitaan jopa osto-option suojauksessa).

(e) Option G jatkuvuudesta voidaan luopua. Voimme siis tarkastella esimerkiksi digitaalioptioita.