VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Prof. Ilkka Virtanen

DYNAAMISET SYSTEEMIT ORMS.2010

Tentti 5.4.2008

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö $(t-1)y^2 + (t-1)^2 y\,y' = 0$. Määritä yhtälön yleisestä ratkaisusta jokin yksityisratkaisu ja hahmottele sen kuvaaja. Mitähän funktiotyyppiä käyrä edustaa? Onko yhtälöllä (yleiseen ratkaisuun sisältymättömiä) erikoisratkaisuja?

2. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + y' = -5$ yleinen ratkaisu sekä tätä yleistä ratkaisua vastaavasta käyräparvesta se ratkaisukäyrä, joka sivuaa t-akselia origossa.

3. Huoneenlämpöinen (21 °C) kakkutaikina pannaan paistumaan uuniin, joka pysyy vakiolämpötilassa 225 °C. Kypsyvän kakun lämpötilan muutos aikayksikössä oletetaan suoraan verrannolliseksi uunin lämpötilan ja kakun lämpötilan erotukseen. Viidentoista minuutin kuluttua uuniin panosta kakun lämpötila on 75 °C. Määritä kakun lämpötilan T kehitys ajan t funktiona. Paisto-ohjeessa on mainittu, että kakun ohjeellinen paistoaika on 45 minuuttia. Minkä lämpötilan kakku on tällöin saavuttanut?

4. Tarkastellaan yrityksen hetkellä $t=0$ tekemään investointiin liittyvää (netto)tulovirtaa. Investoinnin pitoaika on T vuotta ja sen tuottama tulovirta oletetaan vakioksi (= k €/v) investoinnin koko eliniän ajan. Korkokanta vuotta kohti laskettuna on i. Oletetaan, että tulot kertyvät (ainakin kirjataan saaduiksi) diskreetisti aina kunkin vuoden lopussa. Korko liitetään tulovirrasta ja sen koroista kertyneeseen pääomaan niin ikään kerran vuodessa, vuoden lopussa. Laadi pääoman kertymistä kuvaava **differenssiyhtälömalli** ja ratkaise se. Suuriko on investoinnin tuottaman tulovirran pääoma-arvo pitoajan T lopussa?

5. Etsi differenssiyhtälölle $2y_{t+2} + 3y_{t+1} - 2y_t = 0$ jokin stabiili yksityisratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y_0 = 16$. Onko ratkaisu yksikäsitteinen? ***Ohje:*** Stabiililla ratkaisulla tarkoitetaan tässä ratkaisua, joka ajan myötä joko a) hakeutuu kohti tiettyä tasapainoarvoa tai b) värähtelee säännönmukaisesti amplitudinsa säilyttäen.

Dynaamiset systeemit O2MS2010

Tentti 5.4.2008

1. $(t-1)y^2 + (t-1)^2 y y' = 0 \quad \Big| : (t-1)y$

$\Rightarrow \quad y + (t-1)y' = 0$

$t-1=0$ eli $t=1$ ja

$y=0$ ~~toteuttavat yhtälön~~ eli

ovat sen erikoisratkaisuja

$$y + (t-1)\frac{dy}{dt} = 0$$ Separoituva!

$$y = -(t-1)\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dt}{(t-1)}$$

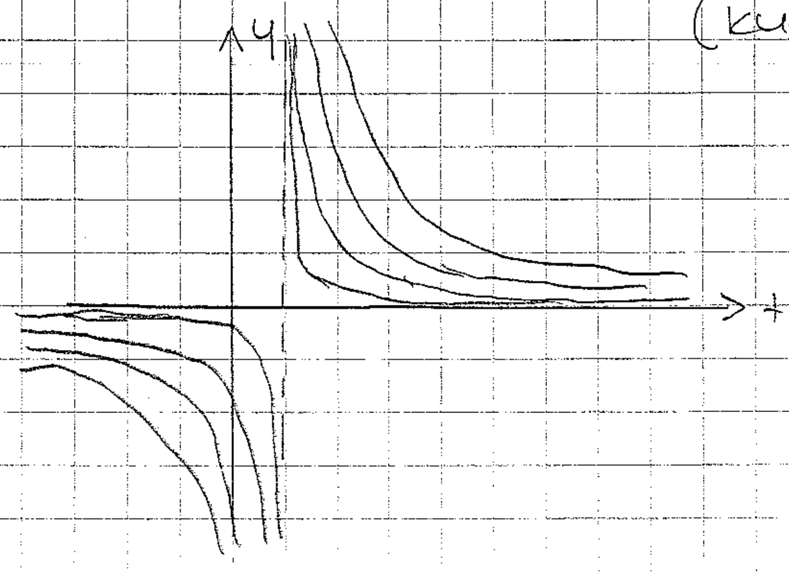
$$\ln y = -\ln(t-1) + \ln \hat{C}$$

$$\ln[y(t-1)] = \ln \hat{C}$$

$$y(t-1) = \hat{C}$$

Huomataan, että yllä saadut erikoisratkaisut sisältyvät yleiseen ratkaisuun (kun $\hat{C}=0$)

Hyperbeliparvi, akselit $t=1$ ja $y=0$ (+ akselit)



2. $y'' + y' = -5$

Homogeeniyhtälö:

$$y'' + y' = 0$$

$$r^2 + r = 0$$

$$r(r+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

$$y_H = C_1 e^{0 \cdot t} + C_2 e^{-1 t} = C_1 + C_2 e^{-t}$$

Yksityisratkaisu:

yrite: $\left.\begin{aligned} y_0 &= A \\ y_0' &= 0 \\ y_0'' &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 + 0 = -5$ ↯

(yl. ratk. sisältää jo vakion)

uusi yrite: $\left.\begin{aligned} y_0 &= At \\ y_0' &= A \\ y_0'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 0 + \underline{A = -5}$ ✓

Yleinen ratkaisu $\quad y = C_1 + C_2 e^{-t} - 5t$

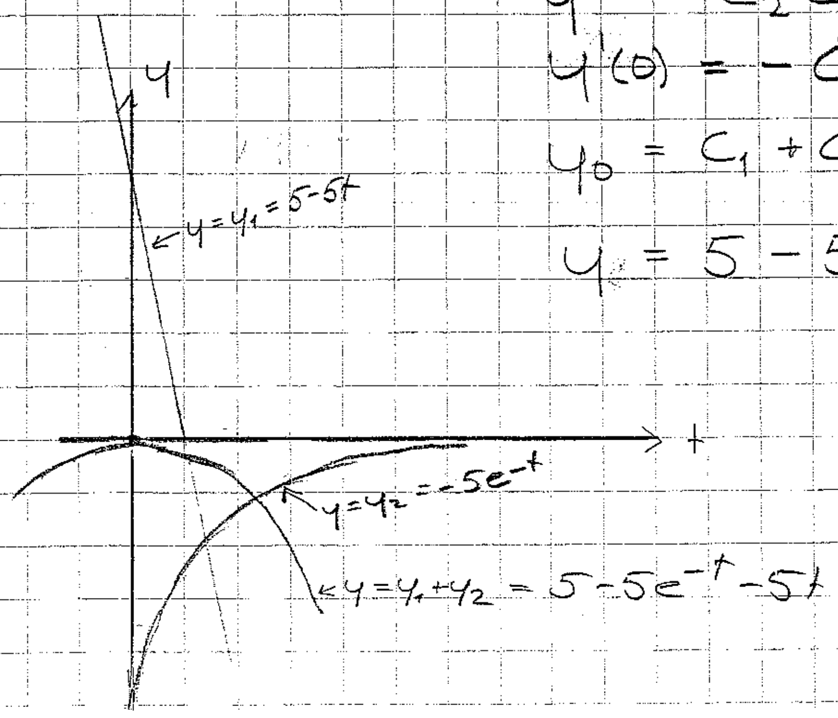
Alkuehdot: $\quad y(0) = 0 \quad$ (kulkee origon kautta)
$\quad y'(0) = 0 \quad$ (sivuaa t-akselia)

$$y' = -C_2 e^{-t} - 5$$

$$y'(0) = -C_2 - 5 = 0 \Rightarrow C_2 = -5$$

$$y_0 = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 5$$

$$y = 5 - 5e^{-t} - 5t$$



3. $T = T(t)$ $\quad \bar{T} = 225$

$$T' = k(\bar{T} - T) = -kT + k\bar{T}$$

$$T' + kT = k\bar{T}$$

Hom. $\quad r + k = 0 \Rightarrow r = -k$

$$T_H = Ce^{-kt}$$

Yks. ratk. $\quad$ yrite: $T_{yks} = A$

$$T_{yks}' = 0$$

$$\Rightarrow 0 + kA = k\bar{T}$$

$$\Rightarrow A = \bar{T}$$

Yl. ratk. $\quad T = Ce^{-kt} + \bar{T} \qquad \bar{T} = 225$

$$T = Ce^{-kt} + 225$$

$C = ?$ $\quad T(0) = 21$

$$21 = Ce^{-k \cdot 0} + 225$$

$$21 = C + 225$$

$$C = -204$$

$$T = -204e^{-kt} + 225$$

$k = ?$ $\quad T(15) = 75$

$$75 = -204e^{-k \cdot 15} + 225$$

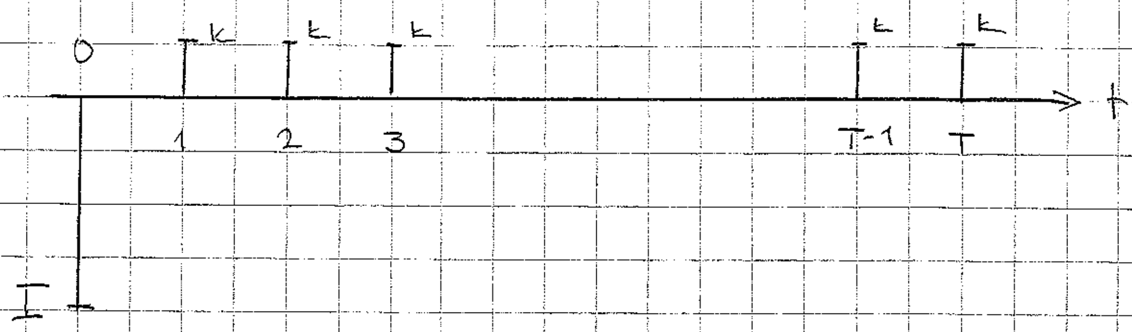
$$e^{-15k} = \frac{150}{204} = 0.735$$

$$k = -\frac{\ln 0.735}{15} = 0.0205$$

$$\underline{T(t) = 225 - 204e^{-0.0205t}}$$

$$T(45) = 225 - 204e^{-0.0205 \times 45} = \underline{\underline{144°C}}$$

4.



K_t = hetkeen t mennessä kertynyt pääoma

$$K_{t+1} = \underbrace{K_t}_{\text{edellinen po.}} + \underbrace{iK_t}_{\text{po:n korko}} + \underbrace{k}_{\text{tulo vuona } t+1}$$

$$K_{t+1} = (1+i)K_t + k$$

$$K_{t+1} - (1+i)K_t = k \qquad \text{Malli}$$

Hom. yht. $\quad K_{t+1} - (1+i)K_t = 0$

$$r - (1+i) = 0 \Rightarrow r = (1+i)$$

$$K_t^{Hom} = C(1+i)^t$$

Yks. ratk. $\quad K_t^0 = A$

$$A - (1+i)A = k \Rightarrow A = -\frac{k}{i}$$

$$K_t = K_t^{Hom} + K_t^0 = C(1+i)^t - \frac{k}{i}$$

$C = ?$ $\quad K_0 = 0$

$$0 = C(1+i)^0 - \frac{k}{i} \Rightarrow C = \frac{k}{i}$$

$$\underline{\underline{K_t}} = \frac{k}{i}(1+i)^t - \frac{k}{i} = \underline{\underline{\frac{k}{i}\left[(1+i)^t - 1\right]}}$$

$$K_T = \frac{k}{i}\left[(1+i)^T - 1\right]$$

5. $$2y_{t+2} + 3y_{t+2} - 2y_t = 0$$

$$2r^2 + 3r - 2 = 0$$

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} r_1 = 1/2 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

$$y_t = C_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^t + C_2(-2)^t$$

Stabiili ratkaisu?

$C_2(-2)^t$ värähtely, jonka amplitudi kasvaa

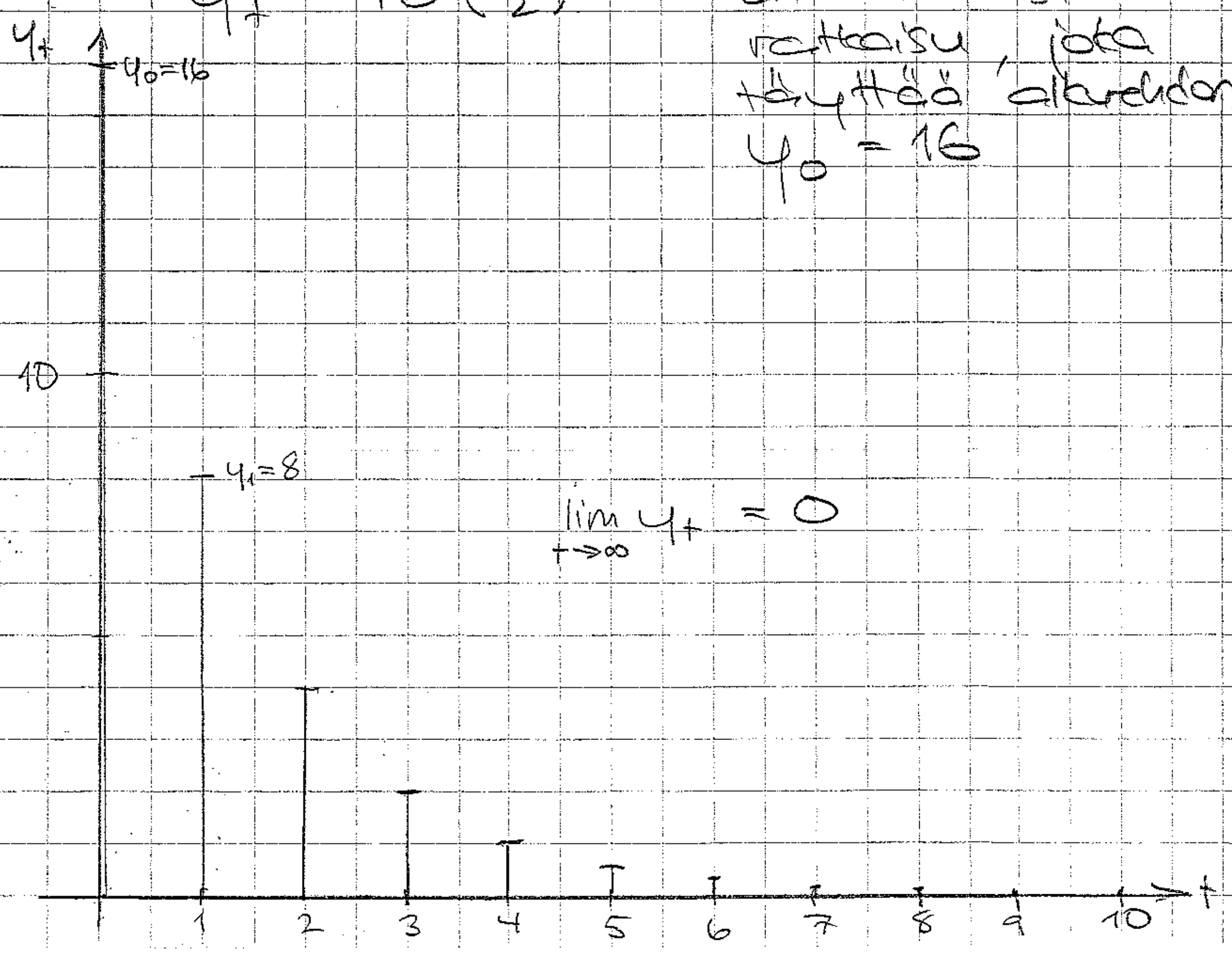
$\Rightarrow$ oltava $C_2 = 0$

$$y_t = C_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^t$$

$y_0 = 16$: $\quad 16 = C_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 = C_1 \Rightarrow C_1 = 16$

$$y_t = 16\left(\tfrac{1}{2}\right)^t$$

on ainoa stabiili ratkaisu, joka täyttää alkuehdon $y_0 = 16$



$$\lim_{t\to\infty} y_t = 0$$