# M A X  M I N - T E O R I A

Pro gradu - tutkielma

Ilkka Virtanen

1968

## Sisällysluettelo

## 1. Johdanto

Nyt kohteena olevassa työssä tarkastellaan seuraavanlaista käytännössä usein esille tulevaa tilannetta. On kaksi osapuolta, pelaajaa, joiden edut joutuvat tietyssä tilanteessa keskenään ristiriitaan. Pelaajat joutuvat tekemään kumpikin ratkaisun, siirron, ja tehtävänä on tutkia, millaisia ratkaisujen tulisi olla, jotta kumpikin osapuoli pääsisi mahdollisimman hyvään lopputulokseen.

Tässä työssä oletetaan tilanne erikoisesti seuraavanlaiseksi. On olemassa tietty kohde, johon liittyy pelaajien ratkaisuista riippuva funktio, ns. päätösfunktio. Ensimmäinen pelaaja $P_1$ yrittää saada päätösfunktion arvon mahdollisimman suureksi, pelaaja $P_2$ taas mahdollisimman pieneksi. Oletetaan edelleen, että $P_1$ joutuu tekemään siirtonsa ensin ja että pelaajalla $P_2$ on ratkaisua tehdessään pelaajan $P_1$ siirto tiedossaan.

Käytetään päätösfunktiosta merkintää $F(\bar{x},\bar{y})$, missä $\bar{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ja $\bar{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ ovat pelaajien $P_1$ ja $P_2$ valitsemia menettelytapoja eli strategioita. Kummankin pelaajan strategia koostuu siis n:stä eri komponentista. Valitsemalla nämä eri komponentit sopivaan keskinäiseen suhteeseen pelaajat pyrkivät parhaaseen mahdolliseen tulokseen. Strategioiden komponentit voivat olla sotilaallisissa sovellutuksissa esim. eri asetyyppejä, kohteita puolustavien tai kohteeseen hyökkäävien joukkojen miesvahvuuksia; yrityksen tuotantoprosessissa ne voivat olla esim. valmistettavia tavaramääriä. Päätösfunktio voi edellä mainituissa tapauksissa kuvata kohteelle aiheutuvaa vahinkoa tai tuotantoprosessin tuottamaa hyötyä.

Päätösfunktiosta $F(\bar{x},\bar{y})$ oletetaan, että se on ainakin jatkuva (usein oletetaan myös derivaattojen olemassaolo). Strategiat $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ oletetaan n - ulotteisen Euklidisen avaruuden $R^n$ reaaliarvoisiksi vektoreiksi. Useimmiten pelaajat joutuvat valitsemaan strategiansa tietystä rajoitetusta joukosta, sillä käytettävissä olevat miesvahvuudet, taloudelliset seikat ym. asettavat rajoituksia tehtävälle valinnalle.

Kun pelaaja $P_1$, joka haluaa maksimoida päätösfunktion $F(\bar{x},\bar{y})$ arvon, valitsee hänelle mahdollisista strategioista tietyn strategian $\bar{x}$, on hänen varauduttava siihen, että $P_2$ saa tietoonsa tämän valinnan ja toimii sen mukaan, ts. valitsee hänelle avoinna olevista strategioista sen strategian $\bar{y}$, jolla saavutetaan $\min_{\bar{y}} F(\bar{x},\bar{y})$. Tuloksena on $P_1$:n valinnasta $\bar{x}$ riippuva funktio

(1) $$\varphi(\bar{x}) = \min_{\bar{y}} F(\bar{x},\bar{y}).$$

Pelaajan $P_1$ on siis alussa valittava $\bar{x}$ siten, että $\varphi(\bar{x})$ saavuttaa suurimman mahdollisen arvonsa. Hän siis valitsee sellaisen strategian $\bar{x}$, jolla

(2) $$\max_{\bar{x}} \varphi(\bar{x}) = \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} F(\bar{x},\bar{y})$$

saavutetaan. Tehtävänä on siis etsiä yhtälön (2) oikean puolen ilmoittamaa funktion arvoa ja niitä strategioita $\bar{x}$ ja $\bar{y}$, jotka tähän johtavat. Tästä tilanteesta on koko esitys saanut nimensä.

Jos funktio $F(\bar{x},\bar{y})$ on luonteeltaan sellainen, että

(3) $$\max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} F(\bar{x},\bar{y}) = \min_{\bar{y}} \max_{\bar{x}} F(\bar{x},\bar{y}),$$

eli että pelaajien $P_1$ ja $P_2$ siirtojärjestys ei vaikuta lopputulokseen, on kysymyksessä tavallinen peliteoreettinen tehtävä, jolla on puhdasstrategia - ratkaisu. Jos kuitenkin tilanne on sellainen, että

(4) $$\max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} F(\bar{x},\bar{y}) < \min_{\bar{y}} \max_{\bar{x}} F(\bar{x},\bar{y}),$$

jolloin lopputulos riippuu ratkaisevasti pelaajien siirtojärjestyksestä, eivät tavallisen peliteorian avulla saadut ratkaisut päde. Nämä ratkaisuthan ovat sekastrategiaratkaisuja. Tällä tarkoitetaan sitä, että pelaajat soveltavat puhtaita strategioitaan tietyillä todennäköisyyksillä. Tällainen menettely ei nyt kuitenkaan tule kysymykseen, sillä $P_1$ tietää $P_2$:n seuraavan, minkä valinnan hän tekee. Pelaajalla $P_2$ on siis valintaa tehdessään $P_1$:n siirto $\bar{x}$ tiedossaan ja hänen tarvitsee vain valita $\bar{y}$ siten, että se minimoi funktion $F(\bar{x},\bar{y})$. Seuraavissa pykälissä esitetään joukko lemmoja ja lauseita, joiden perusteella on monessa tapauksessa mahdollista ratkaista tyyppiä (4) oleva tehtävä.

## 2. Gibbs'in lemma

Ennen varsinaista max min - teoriaa esitetään eräitä usein sangen käyttökelpoisiksi osoittautuvia lemmoja. Näistä ensimmäinen käsittelee funktion maksimiarvon etsimistä. Se tunnetaan keksijänsä J. W. GIBBS'in mukaan Gibbs'in lemmana.

Lemma 1 (Gibbs'in lemma). Oletetaan, että funktiot $f_i(x_i)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ ovat differentioituvia. Oletetaan edelleen, että funktio $\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ saavuttaa suurimman arvonsa pisteessä $\bar{x}^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)$, kun reunaehdot

$$\sum_{i=1}^n x_i = X \text{ ja } x_i \geq 0 \quad (i = 1,\dots,n) \tag{5}$$

ovat voimassa. Tällöin on olemassa sellainen reaaliluku $\lambda$, että

$$\begin{cases} f_i'(x_i^0) = \lambda, & \text{jos } x_i^0 > 0, \\ f_i'(x_i^0) \leq \lambda, & \text{jos } x_i^0 = 0. \end{cases} \tag{6}$$



Todistus. Olkoon $x_i^0 > 0$. Olkoon edelleen $j$ $(1 \leq j \leq n)$ mielivaltainen indeksi kuitenkin siten, että $j \neq i$. Toteuttakoon luku $\varepsilon$ ehdon $0 \leq \varepsilon < x_i^0$. Merkitään

$$h(\varepsilon) = f_i(x_i^0 - \varepsilon) + f_j(x_j^0 + \varepsilon) + \sum_{k \neq i,j} f_k(x_k^0). \tag{7}$$

Selvästikin näin muutettu argumenttijoukko edelleen toteuttaa lemman edellyttämät reunaehdot (5). Funktio $h(\varepsilon)$ on $\varepsilon$:n differentioituva funktio. Koska $h(\varepsilon)$ oletuksen mukaan saavuttaa suurimman arvonsa pisteessä $\varepsilon = 0$, on oltava $h'(0) \leq 0$. Yhtälöstä (7) saadaan derivoimalla ja sijoittamalla $\varepsilon = 0$:

$$h'(0) = -f_i'(x_i^0) + f_j'(x_j^0). \tag{8}$$

Koska $h'(0) \leq 0$, on voimassa

$$f_j'(x_j^0) \leq f_i'(x_i^0). \tag{9}$$

Tulos (9) saatiin oletuksesta $x_i^0 > 0$ lähtien. Jos myös $x_j^0 > 0$, saadaan samalla tavalla

$$f_i'(x_i^0) \leq f_j'(x_j^0). \tag{10}$$

Kun (9) ja (10) yhdistetään, saadaan

$$f_i'(x_i^0) = f_j'(x_j^0). \tag{11}$$

Yhtälön (11) perusteella voidaan nyt päätellä, että kaikilla niillä derivaatan arvoilla $f_i'(x_i^0)$, joita vastaavat argumentin arvot $x_i^0 > 0$, on yhteinen arvo, jota voidaan merkitä luvulla $\lambda$. Ehdosta (9) taas nähdään, että $f_j'(x_j^0) \leq \lambda$, jos $x_j^0 = 0$. Lemma 1 on näin todistettu oikeaksi.

Seuraavat kaksi lemmaa koskevat sellaisia valintatehtäviä, joilla päätösfunktion $F(\bar{x},\bar{y})$ luonteesta johtuen on puhdasstrategiaratkaisu, ts. on olemassa sellaiset optimistrategiat $\bar{x}^0$ ja $\bar{y}^0$, että

$$(12)\quad \begin{cases} F(\bar{x}^0,\bar{y}) \geq F(\bar{x}^0,\bar{y}^0) \text{ kaikilla } P_2\text{:n strategioilla } \bar{y}, \\ F(\bar{x}^0,\bar{y}^0) \geq F(\bar{x},\bar{y}^0) \text{ kaikilla } P_1\text{:n strategioilla } \bar{x}. \end{cases}$$

Ensinnä esitettävän lemman 2 on todistanut S. KAKUTANI ([4], teoreemat 2 ja 3 ss. 458 - 459).

Lemma 2. Oletetaan, että funktio $F(\bar{x},\bar{y})$ on jatkuva avaruudessa K x L, missä K ja L ovat kompakteja ja konvekseja. Merkitään symbolilla $X(\bar{y})$ niiden $\bar{x}$ - pisteiden joukkoa, joissa funktio $F(\bar{x},\bar{y})$saavuttaa suurimman arvonsa, kun piste $\bar{y}$ on kiinnitetty. Vastaavasti $Y(\bar{x})$ on niiden pisteiden $\bar{y}$ muodostama joukko, joissa $F(\bar{x},\bar{y})$ saavuttaa pienimmän arvonsa, kun $\bar{x}$:llä on jokin kiinteä arvo. Jos nyt $X(\bar{y})$ on konveksi kaikilla kysymykseen tulevilla $\bar{y}$ - arvoilla ja $Y(\bar{x})$ konveksi kaikilla $\bar{x}$ - arvoilla, on tehtävällä muotoa (12) oleva puhdasstrategiaratkaisu.

Seuraavana esitettävä lemma 3 on erikoistapaus yllä olevasta lemmasta 2.

Lemma 3. Jos funktio $F(\bar{x},\bar{y})$ on kupera (engl. concave) muuttujan $\bar{x}$ suhteen ja konveksi muuttujan $\bar{y}$ suhteen, on valintatehtävällä, jonka päätösfunktiona on $F(\bar{x},\bar{y})$, muotoa (12) oleva puhdasstrategiaratkaisu.

Todistus. Lemman 2 perusteella on riittävää osoittaa, että joukot $X(\bar{y})$ ja $Y(\bar{x})$ ovat konvekseja. Osoitetaan ensin, että $X(\bar{y})$ on konveksi. Olkoon muuttujalla $\bar{y}$ mielivaltainen kiinteä arvo ja olkoot $\bar{x}^1$ ja $\bar{x}^2$ mielivaltaisia joukon $X(\bar{y})$ alkioita. Merkitään $\bar{x}^r = r\cdot\bar{x}^1 + (1-r)\cdot\bar{x}^2$, missä $0 \leq r \leq 1$. Nyt on

$$(13)\qquad F(\bar{x}^r,\bar{y}) = F(r\cdot\bar{x}^1 + (1-r)\cdot\bar{x}^2,\bar{y}).$$

Koska $F(\bar{x},\bar{y})$ on kupera $\bar{x}$:n suhteen, on

$$(14)\qquad F(r\cdot\bar{x}^1 + (1-r)\cdot\bar{x}^2,\ \bar{y}) \geq r\cdot F(\bar{x}^1,\bar{y}) + (1-r)\cdot F(\bar{x}^2,\bar{y}).$$



Merkitään $g(\bar{y}) = \max\limits_{\bar{x}} F(\bar{x},\bar{y})$. Koska pisteet $\bar{x}^1$ ja $\bar{x}^2$ olivat joukon $X(\bar{y})$ alkioita, on $F(\bar{x}^1,\bar{y}) = F(\bar{x}^2,\bar{y}) = g(\bar{y})$. Kun otetaan huomioon tämä tulos sekä kaavat (13) ja (14), saadaan

$$(15)\qquad F(\bar{x}^r,\bar{y}) \geq r\cdot g(\bar{y}) + (1-r)\cdot g(\bar{y}) = g(\bar{y}).$$

Koska $g(\bar{y})$ oli $F(\bar{x},\bar{y})$:n maksimiarvo, ei (15):ssä voi tulla erisuuruusmerkki kysymykseen, joten on oltava

$$(16)\qquad F(\bar{x}^r,\bar{y}) = g(\bar{y}) = \max_{\bar{x}} F(\bar{x},\bar{y}).$$

Näin ollen myös piste $\bar{x}^r$ kuuluu joukkoon $X(\bar{y})$. Näin on joukon $X(\bar{y})$ konveksisuus todistettu.

Joukon $Y(\bar{x})$ konveksisuus osoitetaan hyvin samantapaisesti. Olkoon $\bar{x}$:llä mielivaltainen kiinteä arvo ja olkoot $\bar{y}^1$ ja $\bar{y}^2$ mielivaltaisia $Y(\bar{x})$:n alkioita. Merkitään $\bar{y}^s = s\cdot\bar{y}^1 + (1-s)\cdot\bar{y}^2$, missä $0 \leq s \leq 1$. Merkitään edelleen $h(\bar{x}) = \min\limits_{\bar{y}} F(\bar{x},\bar{y})$. Koska $F(\bar{x},\bar{y})$ on konveksi $\bar{y}$:n suhteen, on

$$(17)\quad \begin{cases} F(\bar{x},\bar{y}^s) = F(\bar{x},s\cdot\bar{y}^1 + (1-s)\cdot\bar{y}^2) \\ \leq s\cdot F(\bar{x},\bar{y}^1) + (1-s)\cdot F(\bar{x},\bar{y}^2) \\ = s\cdot h(\bar{x}) + (1-s)\cdot h(\bar{x}) = h(\bar{x}). \end{cases}$$

Funktion $h(\bar{x})$ määritelmän nojalla ei epäyhtälö voi olla voimassa, joten

$$(18)\qquad F(\bar{x},\bar{y}^s) = h(\bar{x}) = \min_{\bar{y}} F(\bar{x},\bar{y}).$$

Näin on myös joukon $Y(\bar{x})$ konveksisuus todistettu. Samalla on lemma 3 kokonaisuudessaan osoitettu oikeaksi.

## 3. Suunnattu derivaatta

Tässä pykälässä tarkastellaan muuttujien $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ funktiota $F(\bar{x},\bar{y})$. Oletetaan, että $\bar{x}$ on Euklidisen avaruuden $R^n$ piste, $\bar{x} = (x_1,x_2,\dots,x_n)$, ja että $\bar{y} = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ on avaruuden $R^n$ suljetun ja rajoitetun osajoukon $\mathcal{Y}$ piste. Funktion $F(\bar{x},\bar{y})$ oletetaan olevan jatkuvan kummankin muuttujan $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ suhteen. Edelleen oletetaan, että osittaisderivaatat

(19) $$F_{x_i}(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\partial}{\partial x_i} F(\bar{x},\bar{y}) \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

ovat jatkuvina olemassa.

Max min - tehtävien tarkasteluissa on funktiolla

(20) $$\varphi(\bar{x}) = \min_{\bar{y}\in\mathcal{Y}} F(\bar{x},\bar{y})$$

hyvin keskeinen asema. Osoittautuu usein, vaikka $F(\bar{x},\bar{y})$ olisi hyvinkin säännöllinen funktio, että $\varphi(\bar{x})$ ei ole differentioituva. Tarkastellaan esimerkiksi funktiota

(21) $$F(\bar{x},\bar{y}) = F(x,y) = y \sin x,$$

missä y on rajoitettu välille $-1 \leq y \leq +1$, ts. joukon $\mathcal{Y}$ muodostaa suljettu väli $[-1,\ 1]$. Nyt on selvästikin $\varphi(x) = -|\sin x|$. Huomataan, että $\varphi(x)$ ei ole differentioituva pisteissä $n\pi$ $(n = 0,\pm1,\pm2,\dots)$. Sillä on kuitenkin vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat näissä pisteissä. Seuraavassa osoitetaan, että tällainen suunnattu derivaatta on yleisestikin olemassa, kunhan funktio $F(\bar{x},\bar{y})$ vain toteuttaa edellä mainitut jatkuvuus- ja derivoituvuusehdot.

Jotta funktio $\varphi(\bar{x})$ saavuttaisi suurimman arvonsa tietyssä pisteessä $\bar{x}^o$, on ilmeisestikin välttämätöntä, että kaikilla $\bar{x}$:n arvoilla on voimassa ehto

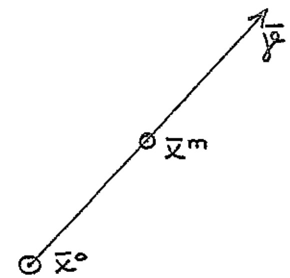
(22) $$\varphi(\bar{x}) \leq \varphi(\bar{x}^o).$$

Niin muodoin erotusosamäärien

(23) $$\frac{\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}^o)}{|\bar{x} - \bar{x}^o|},$$

kun $\bar{x} \to \bar{x}^o$ mielivaltaisesta suunnasta, täytyy olla ei-positiivisia. Tarkastellaankin seuraavaksi, mikä yhteys näiden osamäärien ja alkuperäisen funktion $F(\bar{x},\bar{y})$välillä vallitsee.

Olkoon $\{\bar{x}^m\}$ pistejono, jossa $\bar{x}^m \to \bar{x}^o$ suunnasta $\bar{\gamma}$, kun $m \to \infty$. Suunnalla $\bar{\gamma}$ tarkoitetaan yksikkövektoria, joka lähtee pisteestä $\bar{x}^o$ ja jonka suuntakosinit ovat $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$, ts. vektoria $(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$. Komponentit toteuttavat siis ehdon $\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 = 1$. Jos $\bar{x}^m \to \bar{x}^o$ suunnasta $\bar{\gamma}$, niin tällöin on kaikilla i:n $(i = 1,2,\dots,n)$ ja m:n arvoilla voimassa



Kuva 1.

(24) $$\frac{x_i^m - x_i^o}{d^m} = \gamma_i,$$

missä $d^m$ on pisteiden $\bar{x}^m$ ja $\bar{x}^o$ välinen n-dimensionaalinen etäisyys. Tämä etäisyys $d^m$ on

(25) $$d^m = |\bar{x}^m - \bar{x}^o| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^m - x_i^o)^2}.$$

Olkoon $Y(\bar{x})$ niiden pisteiden $\bar{y} \in \mathcal{Y}$ joukko, joissa $F(\bar{x},\bar{y})$ kiinteällä $\bar{x}$:n arvolla saavuttaa pienimmän arvonsa. Ensinnäkin on todettava, että joukko $\mathcal{Y}$ ei ole tyhjä. Näin on, koska oletuksen mukaan funktio $F(\bar{x},\bar{y})$ on jatkuva sekä joukko $\mathcal{Y}$ on suljettu ja rajoitettu, ja niin muodoin $F(\bar{x},\bar{y})$:llä on joukossa $\mathcal{Y}$ tietty pienin arvo.

Ryhdytään nyt tarkastelemaan erotusosamäärää

(26) $$\frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^o)}{|\bar{x}^m - \bar{x}^o|} = \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^o)}{d^m}.$$

Oletetaan, että $\bar{x}^m \to \bar{x}^o$, kun $m \to \infty$, ja että $\bar{y}^o \in Y(\bar{x}^o)$ ja $\bar{y}^m \in Y(\bar{x}^m)$ $(m \geq 1)$. Yhtälö (26) voidaan näin kirjoittaa muotoon

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(\bar{x}^m)-\varphi(\bar{x}^o)}{d^m} = \dfrac{F(\bar{x}^m,\bar{y}^m)-F(\bar{x}^o,\bar{y}^o)}{d^m} \\[2ex] = \dfrac{F(\bar{x}^m,\bar{y}^m)-F(\bar{x}^m,\bar{y}^o)}{d^m} + \dfrac{F(\bar{x}^m,\bar{y}^o)-F(\bar{x}^o,\bar{y}^o)}{d^m}. \end{cases}$$

Koska $\bar{y}^m \in Y(\bar{x}^m)$, on lauseke $F(\bar{x}^m,\bar{y}^m) - F(\bar{x}^m,\bar{y}^o)$ ei-positiivinen. Saadaan siis

$$(28)\quad \frac{\varphi(\bar{x}^m)-\varphi(\bar{x}^o)}{d^m} \le \frac{F(\bar{x}^m,\bar{y}^o)-F(\bar{x}^o,\bar{y}^o)}{d^m}.$$

Kaavan (28) oikeaan puoleen sovelletaan nyt n:n muuttujan funktion väliarvolausetta. Sen mukaan on

$$(29)\quad \frac{F(\bar{x}^m,\bar{y}^o)-F(\bar{x}^o,\bar{y}^o)}{d^m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^m - x_i^o}{d^m}\, F_{x_i}(\bar{x}^{m(\theta)},\bar{y}^o),$$

missä $\bar{x}^{m(\theta)} = (1-\theta)\,\bar{x}^o + \theta\,\bar{x}^m$. Luvulla $\theta$ on jokin (m:stä riippuva) arvo väliltä $0 < \theta < 1$. Havainnollisesti $\bar{x}^{m(\theta)}$ on jokin pisteitä $\bar{x}^m$ ja $\bar{x}^o$ yhdistävän janan piste. Kun yhdistetään tulokset (24), (28) ja (29), saadaan

$$(30)\quad \frac{\varphi(\bar{x}^m)-\varphi(\bar{x}^o)}{d^m} \le \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^{m(\theta)},\bar{y}^o).$$

Kuten jo edellä todettiin, $\bar{x}^{m(\theta)}$ on pisteitä $\bar{x}^m$ ja $\bar{x}^o$ yhdistävällä janalla, joten $\bar{x}^{m(\theta)} \to \bar{x}^o$, kun $m \to \infty$. Koska edelleen $F_{x_i}(\bar{x},\bar{y})$ on oletuksen mukaan jatkuva, on voimassa

$$(31)\quad F_{x_i}(\bar{x}^{m(\theta)},\bar{y}^o) \to F_{x_i}(\bar{x}^o,\bar{y}^o), \text{ kun } m \to \infty.$$

Kaavan (30) oikea puoli lähenee näin ollen raja-arvoa

$$(32)\quad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^o,\bar{y}^o).$$

Vasemman puolen osamäärillä on tämä raja-arvo (32) ylärajanaan kaikilla m:n arvoilla. Siten on

$$(33)\quad \limsup_{m\to\infty}\left[\frac{\varphi(\bar{x}^m)-\varphi(\bar{x}^o)}{d^m}\right] \le \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^o,\bar{y}^o).$$



$$(38)\quad \lim_{m^* \to \infty}\left[\frac{\varphi(\bar{x}^{m^*})-\varphi(\bar{x}^o)}{d^{m^*}}\right] = \liminf_{\bar{x}^m \to \bar{x}^o}\left[\frac{\varphi(\bar{x}^m)-\varphi(\bar{x}^o)}{d^m}\right].$$

Olkoon $\bar{y}^{m^*}$ joukon $Y(\bar{x}^{m^*})$ alkio. Valitaan nyt sellainen jonon $\{m^*\}$ alijono $\{m'\}$, että alkiot $\bar{y}^{m'}$ konvergoivat kohti tiettyä raja-arvoa, jota merkitään $\bar{y}^{\vartheta}$. Lemman 4 nojalla $\bar{y}^{\vartheta} \in Y(\bar{x}^o)$, ts. $F(\bar{x}^o,\bar{y})$ saavuttaa pienimmän arvonsa pisteessä $\bar{y}^{\vartheta}$. Näin saadaan

$$(39)\quad \begin{aligned} \frac{\varphi(\bar{x}^{m'})-\varphi(\bar{x}^o)}{d^{m'}} &= \frac{F(\bar{x}^{m'},\bar{y}^{m'})-F(\bar{x}^o,\bar{y}^{\vartheta})}{d^{m'}} \\ &= \frac{F(\bar{x}^{m'},\bar{y}^{m'})-F(\bar{x}^o,\bar{y}^{m'})}{d^{m'}} + \frac{F(\bar{x}^o,\bar{y}^{m'})-F(\bar{x}^o,\bar{y}^{\vartheta})}{d^{m'}} \\ &\ge \frac{F(\bar{x}^{m'},\bar{y}^{m'})-F(\bar{x}^o,\bar{y}^{m'})}{d^{m'}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^{m'(\omega)},\bar{y}^{m'}), \end{aligned}$$

missä $\bar{x}^{m'(\omega)} = (1-\omega)\,\bar{x}^o + \omega\,\bar{x}^{m'}$. Luvulla $\omega$ on jokin ($m'$:sta riippuva) arvo väliltä $0 < \omega < 1$. Viimeinen yhtälö (39):ssä saadaan väliarvolauseen perusteella samoin kuin (29):ssä. Pisteellä $\bar{x}^{m'(\omega)}$ on vastaava merkitys kuin $\bar{x}^{m(\theta)}$:lla yhtälössä (29), ts. se sijaitsee pisteitä $\bar{x}^o$ ja $\bar{x}^{m'}$ yhdistävällä janalla. Siis $\bar{x}^{m'(\omega)} \to \bar{x}^o$, kun $m' \to \infty$, joten rajalle siirryttäessä saadaan

$$(40)\quad \lim_{m' \to \infty}\left[\frac{\varphi(\bar{x}^{m'})-\varphi(\bar{x}^o)}{d^{m'}}\right] \ge \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^o,\bar{y}^{\vartheta}).$$

Kun otetaan huomioon, että $\{m'\}$ on jonon $\{m^*\}$ alijono, saadaan (38):n ja (40):n perusteella viimein

$$(41)\quad \liminf_{\bar{x}^m \to \bar{x}^o}\left[\frac{\varphi(\bar{x}^m)-\varphi(\bar{x}^o)}{d^m}\right] \ge \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^o,\bar{y}^{\vartheta}).$$

Yllä olevassa kaavassa alkio $\bar{y}^{\vartheta} \in Y(\bar{x}^o)$ on niiden pisteiden $\bar{y}^m \in Y(\bar{x}^m)$ raja-arvo, jotka saadaan, kun $\bar{x}^m \to \bar{x}^o$ suunnasta $\bar{\gamma}$. Yhdistetään tulokset (34) ja (41), jolloin voidaan todeta, että

$$
(42)\quad
\begin{aligned}
&\limsup_{\bar{x}^m \to \bar{x}^0} \left[ \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \\
&= \liminf_{\bar{x}^m \to \bar{x}^0} \left[ \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \\
&= \lim_{\bar{x}^m \to \bar{x}^0} \left[ \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \\
&= \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x}^0)} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^{\gamma}).
\end{aligned}
$$

Näin on saatettu loppuun seuraavan lauseen, max min - teorian eräänlaisen peruslauseen, todistus:

<u>Lause 1.</u> Olkoon $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ jokin suunta. Silloin funktion $\varphi(\bar{x})$ suuntaan $\bar{\gamma}$ laskettu suunnattu derivaatta $D_{\gamma}\varphi(\bar{x})$ on olemassa jokaisessa pisteessä $\bar{x}$ ja sen arvon ilmoittaa lauseke

$$
(43)\qquad D_{\gamma}\varphi(\bar{x}) = \min_{\bar{y}\, Y(\bar{x})} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}),
$$

missä $Y(\bar{x})$ merkitsee niiden pisteiden $\bar{y} \in \mathcal{Y}$ muodostamaa joukkoa, joissa funktio $F(\bar{x},\bar{y})$ saavuttaa pienimmän arvonsa. Olkoon $\{\bar{x}^m\}$ mielivaltainen pistejono, joka lähestyy pistettä $\bar{x}$ suunnasta $\bar{\gamma}$ (siten, että $\bar{x}^m \neq \bar{x}$), ja olkoon $\bar{y}^m$ joukon $Y(\bar{x}^m)$ alkio. Silloin on olemassa jonon $\{m\}$ alijono $\{m'\}$ siten, että jono $\{\bar{y}^{m'}\}$ konvergoi kohti pistettä $\bar{y}^{\gamma} \in Y(\bar{x})$, missä pisteessä saavutetaan derivaatan $D_{\gamma}\varphi(\bar{x})$ lausekkeessa (43) esiintyvä minimiarvo.

<u>Huomautus.</u> Lausessa 1 pistejono $\{\bar{x}^m\}$ läheni pistettä $\bar{x}^0$ suunnasta $\bar{\gamma}$, ts. pitkin tiettyä suoraa. Tulosta voidaan nyt hieman yleistää. Olkoon C jokin pisteestä $\bar{x}^0$ lähtevä säännöllinen käyrän kaari. Olkoon $\{\bar{x}^m\}$ sellainen kaarelta C valittu pistejono, että $\lim_{m\to\infty} \bar{x}^m = \bar{x}^0$ ja $\bar{x}^m \neq \bar{x}^0$ ($m = 1, 2, \ldots$). Merkitään

$$
(44)\qquad \gamma_i^m = \frac{x_i^m - x_i^0}{d^m},
$$



missä $d^m$ on pisteiden $\bar{x}^m$ ja $\bar{x}^0$ välinen etäisyys. Mikäli jokainen edellä kuvatun kaltainen kaaren C pistejono $\{\bar{x}^m\}$ toteuttaa ehdon

$$
(45)\qquad \lim_{m\to\infty} \gamma_i^m = \gamma_i,
$$

sanotaan kaaren C lähtevän pisteestä $\bar{x}^0$ suuntaan $\bar{\gamma}$. Lause 1 on nyt voimassa, vaikka siinä esiintyvä suunta $\bar{\gamma}$ korvataan edellä esitetyllä, kaavojen (44) ja (45) mukaisella yleistetyllä suunnan käsitteellä.

<u>Todistus.</u> Todistus noudattaa melkein täysin lauseen 1 todistuksessa käytettyjä menetelmiä. Eroja on havaittavissa vain muutamin kohdin. Yhtälön (30) sijaan saadaan

$$
(30)'\qquad \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \leq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^m F_{x_i}(\bar{x}^{m(\theta')}, \bar{y}^0).
$$

Koska $\lim_{m\to\infty} \gamma_i^m = \gamma_i$, saadaan samoin kuin lauseen 1 todistuksessa

$$
(34)'\qquad \limsup_{\bar{x}^m \to \bar{x}^0} \left[ \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \leq \min_{\bar{y}\in Y(\bar{x}^0)} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}),
$$

missä lähestymisen $\bar{x}^m \to \bar{x}^0$ on tapahduttava pitkin kaarta C. Samoin saadaan myös tulos

$$
(41)'\qquad \liminf_{\bar{x}^m \to \bar{x}^0} \left[ \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \geq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^{\gamma}).
$$

Kaavoista (34)' ja (41)' seuraa väite.

Voidaan havaita, että lause 1 on klassillisen matematiikan erään tunnetun kaavan yleistys. Olkoon funktio $f(x,y)$ kaikkine toisen kertaluvun osittaisderivaattoineen jatkuva yksikköneliössä $N = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$. Oletetaan, että $f_{yy}(x,y) > 0$ kaikkialla neliössä N. Oletetaan edelleen, että funktio $f(x,y)$ saavuttaa kullakin x:n arvolla minimiarvonsa jossakin välin $-1 \leq y \leq 1$ sisäpisteessä. Tällä y:n arvolla on $f_y(x,y) = 0$ ja koska $f_{yy}(x,y) > 0$, on mainittu y yksikäsitteisesti määrätty. Ratkaisemattomien funktioiden teorian erään lauseen perusteella ([2], s. 138) on mahdollista ratkaista ko. minimin antava y:n arvo x:n funktiona. Saadaan funktio $y = y(x)$, joka on jatkuvasti derivoituva. Näin ollen on

$$(46) \qquad \varphi(x) = \min_{-1 \leq y \leq 1} f(x,y) = f(x,y(x)).$$

Edellä olevan perusteella myös $\varphi(x)$ on jatkuvasti derivoituva. Sen derivaataksi saadaan

$$(47) \qquad \varphi'(x) = f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))\, y'(x) = f_x(x,y(x)),$$

koska $f_y(x,y(x)) \equiv 0$. On helppo huomata, että (47) on erikoistapaus kaavasta (43).

Mikäli funktio $F(\bar{x},\bar{y})$ on luonteeltaan sellainen, että kutakin pistettä $\bar{x}$ kohti on olemassa vain yksi $\bar{y} \in Y(\bar{x})$, saa yhtälö (43) yksinkertaisemman muodon

$$(48) \qquad D_\gamma \varphi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i F_{x_i}(\bar{x},\bar{y}).$$

Erikoisesti, jos merkitään symbolilla $D_{i+}\varphi(\bar{x})$ funktion $\varphi(\bar{x})$ positiivisen $x_i$ - akselin suuntaan laskettua derivaattaa ja symbolilla $D_{i-}\varphi(\bar{x})$ vastaavaa negatiiviseen suuntaan laskettua derivaattaa, seuraa (48):sta

$$(49) \qquad D_{i+}\varphi(\bar{x}) = F_{x_i}(\bar{x},\bar{y}),$$

$$(50) \qquad D_{i-}\varphi(\bar{x}) = -F_{x_i}(\bar{x},\bar{y}).$$

Yhtälö (49) ilmoittaa nyt funktion $\varphi(\bar{x})$ muuttujan $x_i$ suhteen lasketun oikeanpuoleisen osittaisderivaatan arvon ja (50) $\varphi(\bar{x})$:n muuttujan $x_i$ suhteen lasketun vasemmanpuoleisen osittaisderivaatan vastaluvun. Funktion $\varphi(\bar{x})$ $x_i$:n suhteen lasketut vasemman- ja oikeanpuoleiset osittaisderivaatat ovat siis olemassa ja molemmat arvoltaan $F_{x_i}(\bar{x},\bar{y})$. Tästä seuraa, että $\varphi(\bar{x})$:n muuttujan $x_i$ suhteen laskettu tavallinen osittaisderivaatta $(\partial/\partial x_i)\varphi(\bar{x})$ on olemassa ja sen ilmoittaa lauseke $F_{x_i}(\bar{x},\bar{y})$. Merkintää $(\partial/\partial x_i)\varphi(\bar{x}) = \varphi_i(\bar{x})$ käyttäen voidaan (48) esittää muodossa



$$(51) \qquad D_\gamma \varphi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \varphi_i(\bar{x}).$$

Suunnatun derivaatan laskeminen on näin palautettu akselien suuntaisten derivaattojen määräämiseksi.

Mikäli ratkaisu $\bar{y}$ on yksikäsitteinen kaikkialla eräässä $\bar{x}$:n ympäristössä, on funktiolla $\varphi(\bar{x})$ edellä esitetyn nojalla kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat tässä pisteen $\bar{x}$ ympäristössä. Funktio $\varphi(\bar{x})$ on näin ollen jatkuva tässä samassa ympäristössä. Osoitetaan seuraavaksi, että tällainen yksikäsitteinen ratkaisu $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$ on $\bar{x}$:n jatkuva funktio. Olkoot $\bar{x}^1$ ja $\bar{x}^2$ kaksi mainitun ympäristön pistettä ja $\bar{y}^1$ ja $\bar{y}^2$ näitä vastaavat $\bar{y}$ - pisteet, ts.

$$(52) \qquad \min_{\bar{y} \in \mathcal{Y}} F(\bar{x}^1,\bar{y}) = F(\bar{x}^1,\bar{y}^1) = \varphi(\bar{x}^1),$$

$$(53) \qquad \min_{\bar{y} \in \mathcal{Y}} F(\bar{x}^2,\bar{y}) = F(\bar{x}^2,\bar{y}^2) = \varphi(\bar{x}^2).$$

Koska $\varphi(\bar{x})$ on jatkuva, on

$$(54) \qquad |\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^2)| < \varepsilon/2,$$

kun $|\bar{x}^1 - \bar{x}^2| \leq \delta'_\varepsilon$. Samoin funktion $F(\bar{x},\bar{y})$ jatkuvuudesta seuraa, että

$$(55) \qquad |F(\bar{x}^1,\bar{y}) - F(\bar{x}^2,\bar{y})| < \varepsilon/2,$$

kun $|\bar{x}^1 - \bar{x}^2| \leq \delta''_\varepsilon$ ja $\bar{y} \in \mathcal{Y}$. Olkoot $\bar{x}^1$ ja $\bar{x}^2$ valitut nyt siten, että

$$(56) \qquad |\bar{x}^1 - \bar{x}^2| \leq \delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon).$$

Tällöin on

$$|\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^2)| = |F(\bar{x}^1,\bar{y}^1) - F(\bar{x}^2,\bar{y}^2)|$$

$$(57) \qquad = |F(\bar{x}^1,\bar{y}^1) - F(\bar{x}^1,\bar{y}^2) + F(\bar{x}^1,\bar{y}^2) - F(\bar{x}^2,\bar{y}^2)|$$

$$\geq |F(\bar{x}^1,\bar{y}^1) - F(\bar{x}^1,\bar{y}^2)| - |F(\bar{x}^1,\bar{y}^2) - F(\bar{x}^2,\bar{y}^2)|.$$

Tästä edelleen

$$
(58)\quad \begin{aligned} &\left|F(\bar{x}^1,\bar{y}^1) - F(\bar{x}^1,\bar{y}^2)\right| \leq \left|\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^2)\right| + \\ &\left|F(\bar{x}^1,\bar{y}^2) - F(\bar{x}^2,\bar{y}^2)\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}
$$

Koska $\varepsilon$ on mielivaltaisen pieni luku ja $F(\bar{x}^1,\bar{y})$ saavuttaa minimiarvonsa vain pisteessä $\bar{y}^1$, voi (58) olla voimassa vain, kun $|\bar{y}^1 - \bar{y}^2| < \rho_\varepsilon$. Siis siitä, että $|\bar{x}^1 - \bar{x}^2| \leq \delta_\varepsilon$, seuraa, että $|\bar{y}^1 - \bar{y}^2| = |\bar{y}(\bar{x}^1) - \bar{y}(\bar{x}^2)| < \rho_\varepsilon$. Funktio $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$ on näin ollen jatkuva.

Edellä olevia merkintöjä käyttäen on

$$
(59)\qquad \varphi_i(\bar{x}) = F_{x_i}(\bar{x},\bar{y}(\bar{x})).
$$

Koska $\bar{y}$ ja $F_{x_i}$ ovat jatkuvia $\bar{x}$:n funktioita, on myös $\varphi_i$ jatkuva. Kun kootaan edellä esitetyt tulokset yhteen, voidaan kirjoittaa seuraava lause:

<u>Lause 2.</u> Oletetaan, että jotakin pistettä $\bar{x}$ vastaavan minimoivien pisteiden joukon $Y(\bar{x})$ muodostaa vain yksi piste $\bar{y}(\bar{x})$. Silloin funktion $\varphi(\bar{x})$ osittaisderivaatat $(\partial/\partial x_i)\varphi(\bar{x}) = \varphi_i(\bar{x})$ $(i = 1, 2, \ldots , n)$ ovat olemassa tässä pisteessä $\bar{x}$ ja suunnatun derivaatan $D_\gamma\varphi(\bar{x})$ lauseke saadaan klassillisen matematiikan "yhdistämissäännöstä" (51). Jos $\bar{y}(\bar{x})$ on yksikäsitteinen kaikkialla tietyssä $\bar{x}$:n ympäristössä, ovat funktio $\varphi(\bar{x})$ ja sen ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat $\varphi_i(\bar{x})$ jatkuvia tässä ympäristössä.

Lauseen 2 oletukset eivät kuitenkaan ole mitenkään yleisesti voimassa, kuten tämän pykälän alussa esitetty esimerkki (21) osoitti. On siis todettava seuraava tosiasia: suunnatun derivaatan laskemista ei yleisesti voida palauttaa koordinaattiakselien suuntaisiksi derivoimisiksi. Tämä onkin ratkaisevin ero klassillisen matematiikan ja max min - teorian välillä. Kun edellisessä riittää $R^n$:n säännöllisiä funktioita tutkittaessa n:n osittaisderivaatan laskeminen, on jälkimmäisessä otettava huomioon äärettömän moneen suun-



taan lasketut derivaatat. Seuraavassa esitettävät lauseet yksinkertaistavat kuitenkin tätä tilannetta.

Ensimmäinen lause on osittainen vastine klassillisen matematiikan yhdistämissäännölle. Se sisältää ns. superadditatiivisuusehdon.

<u>Lause 3.</u> Olkoot $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ ja $\bar{\gamma}$ suuntia sekä a ja b positiivisia reaalilukuja. Mikäli suunnat toteuttavat ehdon $\bar{\gamma} = a\bar{\alpha} + b\bar{\beta}$, on

$$
(60)\qquad D_\gamma\varphi(\bar{x}) \geq a\, D_\alpha\varphi(\bar{x}) + b\, D_\beta\varphi(\bar{x}).
$$

<u>Todistus.</u> Lauseen todistus on helposti suoritettavissa suoraan suunnatun derivaatan kaavan (43) perusteella. Sen mukaan saadaan

$$
(61)\quad \begin{aligned} D_\gamma\varphi(\bar{x}) &= \min_{\bar{y}\in Y(\bar{x})} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\, F_{x_i}(\bar{x},\bar{y}) \\ &= \min_{\bar{y}\, Y(\bar{x})} \left[a\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, F_{x_i}(\bar{x},\bar{y}) + b\sum_{i=1}^{n} \beta_i F_{x_i}(\bar{x},\bar{y})\right] \\ &\geq a\cdot\min_{\bar{y}\in Y(\bar{x})} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_{x_i}(\bar{x},\bar{y}) + b\cdot\min_{\bar{y}\in Y(\bar{x})} \sum_{i=1}^{n} \beta_i F_{x_i}(\bar{x},\bar{y}) \\ &= a\, D_\alpha\varphi(\bar{x}) + b\, D_\beta\varphi(\bar{x}). \end{aligned}
$$

Edellä on jo todettu, että suunnattu derivaatta $D_\gamma\varphi(\bar{x})$ ei välttämättä ole jatkuva $\bar{x}$:n funktio. Seuraavien osittaisten tulosten voidaan kuitenkin osoittaa olevan voimassa.

<u>Lause 4.</u> Suunnattu derivaatta $D_\gamma\varphi(\bar{x})$ on alhaalta päin puolijatkuva muuttujien $\bar{\gamma}$ ja $\bar{x}$ suhteen.

<u>Todistus.</u> Olkoot $\{\bar{x}^m\}$ ja $\{\bar{\gamma}^m\}$ sellaiset jonot, että $\lim_{m\to\infty} \bar{x}^m = \bar{x}^0$ ja $\lim_{m\to\infty} \bar{\gamma}^m = \bar{\gamma}^0$. On osoitettava oikeaksi kaava

$$
(62)\qquad \liminf_{m\to\infty} D_{\gamma^m}\varphi(\bar{x}^m) = D_{\gamma^0}\varphi(\bar{x}^0).
$$

Käsitteen $\liminf_{m\to\infty}$ määritelmän perusteella on nyt riittävä osoittaa, että ehto

(63) $$\liminf_{m \to \infty} D_{\gamma^m}\varphi(\bar{x}^m) \geq D_{\gamma^0}\varphi(\bar{x}^0).$$

on voimassa. Olkoon $\{m'\}$ sellainen jonon $\{m\}$ alijono, että

(64) $$\lim_{m' \to \infty} D_{\gamma^{m'}}\varphi(\bar{x}^{m'}) = \liminf_{m \to \infty} D_{\gamma^m}\varphi(\bar{x}^m).$$

Suunnatun derivaatan määritelmän nojalla on nyt olemassa sellainen $\bar{y}^{m'} \in Y(\bar{x}^{m'})$, että

(65) $$D_{\gamma^{m'}}\varphi(\bar{x}^{m'}) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{m'} F_{x_i}(\bar{x}^{m'}, \bar{y}^{m'}).$$

Valitaan edelleen sellainen jonon $\{m'\}$ alijono $\{m^*\}$, että jono $\{\bar{y}^{m^*}\}$ suppenee kohti pistettä $\bar{y}^*$. Lemman 4 perusteella $\bar{y}^* \in Y(\bar{x}^0)$. Koska $F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y})$ on jatkuva $\bar{x}$:n ja $\bar{y}$:n funktio, lähestyy (65):n oikea puoli äärellistä raja-arvoa, kun $m^* \to \infty$. Tämä raja-arvo on

(66) $$\lim_{m^* \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{m^*} F_{x_i}(\bar{x}^{m^*}, \bar{y}^{m^*}) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^0 F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^*).$$

Yhtälöistä (64) - (66) seuraa nyt

(67) $$\liminf_{m \to \infty} D_{\gamma^m}\varphi(\bar{x}^m) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^0 F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^*).$$

Mutta koska piste $\bar{y}^* \in Y(\bar{x}^0)$, on

(68) $$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^0 F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^*) \geq \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x}^0)} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^0 F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y})$$
$$= D_{\gamma^0}\varphi(\bar{x}^0).$$

Kun yhdistetään kaavat (67) ja (68), on väite (63) osoitettu oikeaksi. Lause 4 on näin todistettu.

Lause 5. Suunnattu derivaatta $D_{\gamma}\varphi(\bar{x})$ on suunnan $\bar{\gamma}$ jatkuva funktio.

Todistus. Lauseen 4 perusteella on riittävää, että todistetaan ylhäältä päin puolijatkuvuus. Oletetaan, että pisteessä $\bar{y}^0$ saavutetaan suunnatun derivaatan $D_{\gamma^0}\varphi(\bar{x}^0)$ lausekkeessa esiintyvä minimiarvo. Siis $\bar{y}^0 \in Y(\bar{x}^0)$. Olkoon



$\{\bar{\gamma}^m\}$ sellainen jono, että $\lim_{m \to \infty} \bar{\gamma}^m = \bar{\gamma}^0$. Ylhäältä päin puolijatkuvuuden todistamiseksi riittää käsitteen $\limsup_{m \to \infty}$ ominaisuuksien perusteella osoittaa, että

(69) $$\limsup_{m \to \infty} D_{\gamma^m}\varphi(\bar{x}^0) \leq D_{\gamma^0}\varphi(\bar{x}^0)$$

on voimassa. Nyt on

(70) $$D_{\gamma^m}\varphi(\bar{x}^0) = \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x}^0)} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^m F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}) \leq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^m F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0).$$

Tästä saadaan edelleen

$$\limsup_{m \to \infty} D_{\gamma^m}\varphi(\bar{x}^0) \leq \limsup_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^m F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0)$$

(71) $$= \sum_{i=1}^{n} (\limsup_{m \to \infty} \gamma_i^m) F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^0 F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0) = D_{\gamma^0}\varphi(\bar{x}^0),$$

mistä nähdään väite oikeaksi.

Seuraavana esitettävä lause on analoginen klassillisen matematiikan väliarvolauseen kanssa. Sitä varten tarvitaan kuitenkin eräs välillä $[0, 1]$ määriteltyjä yhden muuttujan funktioita koskeva lemma.

Lemma 5. Olkoon funktio $f(x)$ jatkuva suljetulla välillä $[0, 1]$ ja olkoon $f(0) = 0$. Oletetaan, että funktiolla $f(x)$ on positiivinen oikeanpuoleinen derivaatta $f'_+(x)$ jokaisessa välin $[0, 1)$ pisteessä. Tällöin on $f(1) > 0$.

Todistus. Lemman todistamiseksi tehdään vastaoletus, että

(72) $$f(1) = -a \leq 0.$$

Merkitään $g(x) = f(x) + a\,x$. Tällöin on $g'_+(x) = f'_+(x) + a > a \geq 0$ koko välillä $[0, 1)$. Saavuttakoon $g(x)$ välillä $[0, 1]$ suurimman arvonsa pisteessä $\hat{x}$. Koska $g'_+(x) > 0$, ei $g(x)$ ole vakio. Näin ollen on $g(\hat{x}) > 0$. Oletetaan, että olisi $\hat{x} > 1$. Tällöin olisi $g'_+(\hat{x}) > 0$, joten olisi olemassa sellaisia pisteitä $x > \hat{x}$, joissa $g(x) > g(\hat{x})$. Tämä on $\hat{x}$:n määritelmän mukaan kuitenkin mahdotonta, joten $\hat{x} = 1$. Näin ollen on $g(1) > 0$. Tästä seuraa, että $f(1) = g(1) - a > -a$. Näin saatu tulos on kuitenkin ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, joten vastaoletuksen on oltava väärä. Näin on osoitettu väite $f(1) > 0$ oikeaksi.

Lause 6 (Max min - teorian väliarvolause). Olkoon $\gamma$ pisteestä $\bar{x}^0$ pisteeseen $\bar{x}^1$ kulkevan janan suunta. Tällä janalla on silloin sellainen piste $\bar{x} \neq \bar{x}^1$, että

$$D_\gamma \varphi(\bar{x}) \leq \frac{\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^0)}{|\bar{x}^1 - \bar{x}^0|} \tag{73}$$

ja sellainen piste $\bar{x}' \neq \bar{x}^1$, että

$$D_\gamma \varphi(\bar{x}') \geq \frac{\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^0)}{|\bar{x}^1 - \bar{x}^0|} . \tag{74}$$

Todistus. Merkitään $\bar{x}^\theta = (1 - \theta)\, \bar{x}^0 + \theta\, \bar{x}^1$, missä $0 \leq \theta \leq 1$. Määritellään funktio $\psi(\theta)$ seuraavasti:

$$\psi(\theta) = \varphi(\bar{x}^\theta) - \varphi(\bar{x}^0) - \theta\left[\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^0)\right]. \tag{75}$$

Näin määritelty funktio toteuttaa reunaehdot

$$\psi(0) = \psi(1) = 0. \tag{76}$$

Muodostetaan seuraavaksi funktion $\psi(\theta)$ oikeanpuoleinen derivaatta $\psi'_+(\theta)$. Tätä varten on ensin laskettava funktion $\varphi(\bar{x}^\theta)$ oikeanpuoleinen derivaatta $\theta$:n suhteen. Käytetään siitä merkintää $\varphi'_+(\bar{x}^\theta)$. Tarkastellaan erotusosamäärää

$$\frac{\varphi(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{\theta' - \theta} = \frac{|\bar{x}^{\theta'} - \bar{x}^\theta|}{\theta' - \theta} \, \frac{\varphi(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{|\bar{x}^{\theta'} - \bar{x}^\theta|}$$

$$= \frac{|(\theta' \bar{x}^1 + (1 - \theta')\bar{x}^0) - (\theta \bar{x}^1 + (1 - \theta)\bar{x}^0)|}{\theta' - \theta} \times \tag{77}$$

$$\times \frac{\varphi(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{|\bar{x}^{\theta'} - \bar{x}^\theta|}$$

$$= \frac{|(\theta' - \theta)\, \bar{x}^1 - (\theta' - \theta)\, \bar{x}^0|}{\theta' - \theta} \, \frac{\varphi(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{|\bar{x}^{\theta'} - \bar{x}^\theta|}$$

$$= |\bar{x}^1 - \bar{x}^0| \, \frac{\varphi(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{|\bar{x}^{\theta'} - \bar{x}^\theta|} ,$$

kun $0 \leq \theta < \theta' \leq 1$. Nyt on

$$\varphi'_+(\bar{x}^\theta) = \lim_{\substack{\theta' \to \theta \\ \theta' > \theta}} \frac{\varphi(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{\theta' - \theta}$$

$$= |\bar{x}^1 - \bar{x}^0| \lim_{\substack{\theta' \to \theta \\ \theta' > \theta}} \frac{\varphi(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{|\bar{x}^{\theta'} - \bar{x}^\theta|} \tag{78}$$

$$= |\bar{x}^1 - \bar{x}^0| \, D_\gamma \varphi(\bar{x}^\theta).$$

Myös derivaatta $\psi'_+(\theta)$ on näin ollen olemassa välillä $0 \leq \theta < 1$ ja sen ilmoittaa lauseke

$$\psi'_+(\theta) = |\bar{x}^1 - \bar{x}^0| \, D_\gamma \varphi(\bar{x}^\theta) - (\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^0)). \tag{79}$$

Mikäli nyt olisi $\psi'_+(\theta) > 0$ koko välillä $[0, 1)$, olisi lemman 5 perusteella $\psi(1) > \psi(0)$, mikä on kuitenkin vastoin reunaehtoa (76). On siis oltava ainakin yhdessä pisteessä $\hat{\theta}$ voimassa $\psi'_+(\hat{\theta}) \leq 0$. Kun merkitään $\bar{x} = \bar{x}^{\hat{\theta}}$, saadaan

$$|\bar{x}^1 - \bar{x}^0| \, D_\gamma \varphi(\bar{x}) - (\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^0)) \leq 0. \tag{80}$$

Huomataan, että (80) on kaava (73) vain toiseen muotoon kirjoitettuna. Väitteen (74) todistus on analoginen.

## 4. Lagrangen kerroin - periaate

Tässä pykälässä esitetään Lagrangen kertoimen periaate, joka antaa välttämättömän ehdon sille, että annettu funktio saavuttaisi suurimman arvonsa tietyssä pisteessä. Useimmat klassillisen Lagrangen kerroin - teoreeman todistukset käyttävät hyväksi akselien suuntaan tapahtuvaa derivointia. Osoittautuu kuitenkin, että vastaavanlainen tulos voidaan johtaa käyttämällä edellä esitettyä yleistettyä suunnattua derivaattaa.

Tarkastellaan aluksi hieman Lagrangen kerroin - menettelyn yleistä periaatetta. Jos tiedetään, että annettu funktio saavuttaa tietyn reunaehdon voimassa ollessa sidotun ääriarvon jossakin pisteessä, niin Lagrangen kertoimen avulla voidaan määritellä uusi funktio, jolla on tavallinen ääriarvo tässä samassa pisteessä, nyt siis rajoittamattomassa avaruudessa.

Sovelletaan edellä esitettyä periaatetta ratkaistaessa tehtävää, jossa on tarkoituksena etsiä funktion $\varphi(\bar{x})$ maksimiarvoa, kun seuraavan reunaehdon on toteuduttava:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = X, \; x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{81}$$

Oletetaan, että $\varphi(\bar{x})$ saavuttaa maksimiarvonsa, kun (81) on voimassa, pisteessä $\bar{x}^o$. Asetetaan kaksi määritelmää, jotka koskevat pisteestä $\bar{x}^o$ lähteviä suuntia $\bar{\gamma}$.

<u>Määritelmä 1.</u> Suunnan $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ sanotaan olevan <u>mahdollinen</u>, jos $\gamma_i \geq 0$ aina, kun $x_i^o = 0$. Suunta $\bar{\gamma}$ on <u>sallittu</u> , jos se on mahdollinen ja täyttää lisäksi ehdon $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 0$.

Yllä määriteltyjen käsitteiden merkitys on seuraava. Pisteestä $\bar{x}^o$ lähtevä suunta $\bar{\gamma}$ on mahdollinen, jos se ei osoita pois ei-negatiivisesta ortantista $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \geq 0 \; (i = 1,2,\ldots,n)\}$. Suunta $\bar{\gamma}$ on sallittu, jos se lisäksi on tasossa $\tau$: $\sum_{i=1}^{n} x_i = X$. Sillä jos lähdetään pisteestä $\bar{x}^o$ ja kuljetaan lyhyt matka h pitkin sallittua vektoria $\bar{\gamma}$, saavutaan pisteeseen $\bar{x}^1 = (x_1^o + h\gamma_1, \ldots, x_n^o + h\gamma_n)$, joka on tasossa $\tau$:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^o + h\gamma_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^o + h\sum_{i=1}^{n}\gamma_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^o = X. \tag{82}$$

Jos siis funktio $\varphi(\bar{x})$ saavuttaa maksimiarvonsa, kun reunaehto (81) toteutuu, pisteessä $\bar{x}^o$, on ehdon

$$D_{\bar{\gamma}}\varphi(\bar{x}^o) \leq 0 \tag{83}$$

oltava voimassa, olipa $\bar{\gamma}$ mikä sallittu suunta hyvänsä. Tehtävän edelleen kehittelyä varten tarvitaan vielä eräitä määritelmiä.

<u>Määritelmä 2.</u> Mahdollinen suunta $\bar{\gamma}$ on <u>positiivinen</u>, jos $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i > 0$, ja <u>negatiivinen</u>, jos $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i < 0$.

Seuraavassa osoitetaan, että jos on annettuna positiivinen suunta $\bar{\gamma}$ ja negatiivinen suunta $\bar{\gamma}'$, niin nämä sopivasti yhdistämällä saadaan sallittu suunta. Oletetaan, että $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = a > 0$ ja $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i' = -b < 0$. Oletetaan myös aluksi, että $\bar{\gamma} + \bar{\gamma}' \neq 0$. Suunnista $\bar{\gamma}$ ja $\bar{\gamma}'$ saadaan sallittu suunta $\bar{\gamma}''$ seuraavasti:

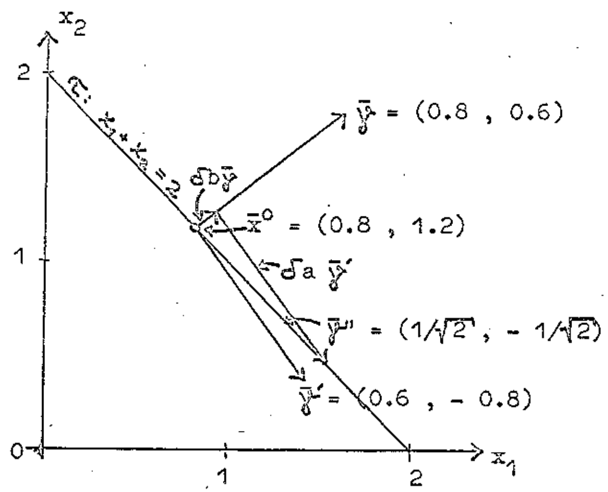
$$\bar{\gamma}'' = \delta(b\,\bar{\gamma} + a\,\bar{\gamma}'). \tag{84}$$

Tässä $\delta > 0$ on valittava siten, että $\bar{\gamma}''$ täyttää suunnalle asetetut vaatimukset, ts. että $\bar{\gamma}''$ on yksikkövektori. Tämä valinta on mahdollista tehdä, koska $\bar{\gamma}'' \neq 0$. Sillä jos olisi $\bar{\gamma}'' = 0$, olisi kaikilla i:n arvoilla $(i = 1,2,\ldots,n)$ $b\gamma_i + a\gamma_i' = 0$, mistä $\gamma_i' = -(b/a)\gamma_i$. Koska $\bar{\gamma}$ ja $\bar{\gamma}'$ ovat yksikkövektoreita, olisi $b = a$ eli $\gamma_i' = -\gamma_i$ . Tämä tapaus suljettiin kuitenkin edellä pois. Suunta $\bar{\gamma}''$ on sallittu, sillä

$$\sum \gamma_i'' = \delta\, b\sum_{i=1}^{n}\gamma_i + \delta\, a\sum_{i=1}^{n}\gamma_i' = \delta(b\cdot a - a\cdot b) = 0. \tag{85}$$

Yllä esitetty sallitun vektorin muodostaminen on havainnollisesti esitetty seuraavalla sivulla olevassa kuviossa 2.

Olkoon esimerkiksi $\bar{\gamma} = (0.8\ ,\ 0.6)$ ja $\bar{\gamma}' = (0.6\ ,\ -0.8)$. Tällöin on $a = 1.4$ ja $b = 0.2$. Saadaan $\bar{\gamma}'' = \delta(1\ ,\ -1)$, mistä $\delta = 1/\sqrt{2}$. Siis viimein $\bar{\gamma}'' = (1/\sqrt{2}\ ,\ -1/\sqrt{2})$.




Kuva 2.

Ehdon (83) mukaan on $D_{\bar{\gamma}''}\varphi(\bar{x}^0) \leq 0$. Lauseen 3 nojalla taas on

$$D_{\bar{\gamma}''}\varphi(\bar{x}^0) \geq \delta\cdot b\cdot D_{\bar{\gamma}}\varphi(\bar{x}^0) + \delta\cdot a\cdot D_{\bar{\gamma}'}\varphi(\bar{x}^0). \tag{86}$$

Kun nämä kaksi tulosta yhdistetään, saadaan

$$b\ D_{\bar{\gamma}}\varphi(\bar{x}^0) + a\ D_{\bar{\gamma}'}\varphi(\bar{x}^0) \leq 0. \tag{87}$$

Otetaan edelleen lukujen a ja b määritelmät huomioon, jolloin (87) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{D_{\bar{\gamma}}\varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i} \leq \frac{D_{\bar{\gamma}'}\varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i'} \tag{88}$$

Siirrytään nyt tarkastelemaan tapausta, jolloin $\bar{\gamma} + \bar{\gamma}' = 0$. Valitaan tällöin jono $\{\bar{\gamma}^m\}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot: $\lim_{m\to\infty} \bar{\gamma}^m = \bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}^m \neq \bar{\gamma}$ $(m = 1,2,\ldots)$, suunnat $\bar{\gamma}^m$ ovat positiivisia suuntia kaikilla m:n arvoilla. Tällöin on



$\bar{\gamma}^m + \bar{\gamma}' \neq 0$, joten kaavaa (88) voidaan soveltaa:

$$\frac{D_{\bar{\gamma}^m}\varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i^m} \leq \frac{D_{\bar{\gamma}'}\varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i'}. \tag{89}$$

Lauseen 4 mukaan suunnattu derivaatta $D_{\bar{\gamma}}\varphi(\bar{x}^0)$ on suunnan $\bar{\gamma}$ jatkuva funktio. Koska suunnat $\bar{\gamma}^m$ ovat kaikilla m:n arvoilla positiivisia suuntia, ovat summat $\sum_{i=1}^n \gamma_i^m$ äärellisiä ja nollasta eroavia. Kaava (89) on näin ollen voimassa myös, kun $m \to \infty$. Raja-arvona saadaan

$$\lim_{m\to\infty} \frac{D_{\bar{\gamma}^m}\varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i^m} = \frac{D_{\bar{\gamma}}\varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i} \leq \frac{D_{\bar{\gamma}'}\varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i'}. \tag{90}$$

Näin on osoitettu, että (88) on voimassa myös silloin, kun $\bar{\gamma} + \bar{\gamma}' = 0$.

Kaikkia positiivisia suuntia $\bar{\gamma}$ vastaten saadaan nyt joukko lukuja

$$\frac{D_{\bar{\gamma}}\varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i}. \tag{91}$$

Merkitään tätä joukkoa kirjaimella L. Samoin saadaan negatiivisia suuntia vastaavien lukujen

$$\frac{D_{\bar{\gamma}'}\varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i'} \tag{92}$$

muodostama joukko R. Mikäli $l \in L$ ja $r \in R$, niin epäyhtälön (88) mukaan on $l \leq r$. Mutta näin on päädytty Dedekindin leikkauksen ([2], ss. 28 - 29 ) mukaiseen tilanteeseen: kun on annettuna kaksi joukkoa L ja R, joilla on yllä kuvatun kaltaiset ominaisuudet, niin on olemassa sellainen nämä joukot erottava luku $\lambda$, että jokainen joukon L alkio $l$ täyttää ehdon $l \leq \lambda$ ja jokainen joukon R alkio $r$ toteuttaa ehdon $r \geq \lambda$. Siis, mikäli $\bar{\gamma}$ on positiivinen suunta, on

$$\frac{D_{\bar{\gamma}}\varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n \gamma_i} \leq \lambda, \tag{93}$$

mistä summalausekkeella $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ kertomalla

(94) $$D_{\gamma}\varphi(\bar{x}^0) \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} \gamma_i .$$

Negatiivisen suunnan $\bar{\gamma}'$ kyseessä ollessa saadaan vastaavasti

(95) $$\frac{D_{\gamma'}\varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i'} \geq \lambda .$$

Tästä saadaan, kun otetaan huomioon summalausekkeen $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i'$ negatiivisuus, kaava

(96) $$D_{\gamma'}\varphi(\bar{x}^0) \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} \gamma_i' .$$

Kaavan (94) havaitaan nyt olevan voimassa, olipa $\bar{\gamma}$ mikä tahansa positiivinen tai negatiivinen suunta. Se on voimassa myös, vaikka $\bar{\gamma}$ olisi sallittukin suunta. Sillä tällöin on $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 0$, joten (94) palautuu muotoon $D_{\gamma}\varphi(\bar{x}^0) \leq 0$. Tämä tulos taas on (83):n nojalla voimassa. Näin on osoitettu oikeaksi seuraava lause:

<u>Lause 7.</u> Jos funktio $\varphi(\bar{x})$ saavuttaa sidotun maksimiarvon reunaehdon (81) toteuttavassa pisteessä $\bar{x}^0$, niin silloin on olemassa sellainen luku $\lambda$, että

(97) $$D_{\gamma}\varphi(\bar{x}^0) \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} \gamma_i ,$$

olipa $\bar{\gamma}$ mikä tahansa ehdon "$\gamma_i \geq 0$, kun $x_i^0 = 0$" täyttävä suunta.

Lauseen 7 sisältämä asia voidaan esittää myös toisessa muodossa. Jos funktiolla $\varphi(\bar{x})$ on sidottu maksimiarvo pisteessä $\bar{x}^0$, niin funktiolla

(98) $$\psi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

on tässä pisteessä ei-positiivinen derivaatta, ts.

(99) $$D_{\gamma}\psi(\bar{x}^0) \leq 0,$$



olipa $\bar{\gamma}$ mikä tahansa mahdollinen suunta. Jos verrataan tätä tulosta (83):een, niin havaitaan, että tällöin oli oltava $D_{\gamma}\varphi(\bar{x}^0) \leq 0$ kaikkiin sallittuihin suuntiin $\bar{\gamma}$. Lagrangen kerroin - menettely on siis uuden funktion $\psi(\bar{x})$ määrittelyn avulla johtanut (81):n määräämästä rajoitetusta avaruuden osasta rajoittamattomaan avaruuteen. On kuitenkin osoittautunut, että tällä uudella Lagrangen funktiolla $\psi(\bar{x})$ ei ole max min - teoriassa niin suurta merkitystä kuin tavallisella Lagrangen funktiolla klassillisessa matematiikassa.

## <u>5. Esimerkkejä</u>

Tarkastellaan lopuksi kahta max min - esimerkkiä. Nämä molemmat liittyvät tiettyyn sotilaallisten kohteiden hyökkäys - puolustus tilanteeseen. Näistä ensimmäinen tehtävä voidaan mukavasti ratkaista edellä esitettyjen tulosten perusteella, toiseen tehtävään taas on päätösfunktion luonteen johdosta sovellettava muita ratkaisumenetelmiä.

<u>Esimerkki 1.</u> Oletetaan tilanne seuraavanlaiseksi. Pelaajalla $P_1$ on n eri kohdetta, joita hän yrittää suojella. Pelaaja $P_2$ edustaa hyökkääjää, jonka tarkoituksena on aiheuttaa näille kohteille mahdollisimman suuri vahinko. Hyökkääjä $P_2$ tietää valitessaan hyökkäävien yksiköiden lukumäärät $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ näitä kohteita puolustavien yksiköiden lukumäärät $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Pelaajalla $P_1$ on käytettävissään puolustajia kaikkiaan määrä X ja $P_2$:lla hyökkääjiä kaikkiaan määrä Y.

Jos $\hat{y}_i$ hyökkääjää läpäisee kohteen i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ puolustuksen, on tästä kohteelle i aiheutuva vahinko $\hat{v}_i(\hat{y}_i)$. Jos kohteeseen i tulevien hyökkääjien luku on $y_i$ ja kohteessa on $x_i$ puolustajaa, läpäisee $g_i(x_i, y_i)$ hyökkääjää puolustuksen. Kohteen i kärsimä vahinko tällöin ilmeisesti $\hat{v}_i(g_i(x_i, y_i)) = v_i(x_i, y_i)$. Pelaajalle $P_1$ aiheutuu täten kokonaisvahinko

$$(100) \qquad V(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i(g_i(x_i,y_i)) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i,y_i),$$

kun eri kohteiden vahingot oletetaan additiivisiksi.

Kun $P_1$ on tehnyt valintansa $\bar{x}$, valitsee $P_2$ $\bar{y}$:n siten, että $V(\bar{x},\bar{y})$ saavuttaa suurimman arvonsa, ts. arvon $\max_{\bar{y}} V(\bar{x},\bar{y})$. Koska $P_1$ haluaa kokonaisvahingon mahdollisimman pieneksi, on hänen tehtävä sellainen valinta $\bar{x}$, että

$$(101) \qquad \min_{\bar{x}} \max_{\bar{y}} V(\bar{x},\bar{y})$$

saavutetaan. Pelaajien on strategioita valitessaan otettava huomioon rajoitukset

$$(102) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = X, \qquad x_i \geq 0 \ (i = 1,2,\ldots,n),$$

$$(103) \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = Y, \qquad y_i \geq 0 \ (i = 1,2,\ldots,n).$$

Tarkastellaan nyt edellä esitetystä tehtävästä seuraavaa erikoistapausta. Oletetaan, että vahinkofunktiot ovat muotoa

$$(104) \qquad \hat{v}_i(y) = 1 - \exp(-k_i y) \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

missä $k_i > 0$. Lukua $k_i$ voidaan kutsua kohteen $i$ vahingoittumisalttiudeksi, sillä mitä suurempi se on, sitä suurempi vahinko syntyy samalla hyökkäysvoimalla. Oletetaan edelleen, että kunkin puolustajan on mahdollista estää vain yhden hyökkääjän pääsy puolustettavaan kohteeseen. Toisaalta oletetaan, että puolustaja myös pystyy tämän tekemään. Funktiot $g_i(x_i,y_i)$ ovat siten muotoa

$$(105) \qquad g_i(x,y) = \begin{cases} y - x, & \text{kun } y > x, \\ 0, & \text{kun } y \leq x. \end{cases} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Kokonaisvahinko saadaan tällöin yhtälöstä



$$(106) \qquad V(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(1 - \exp(k_i g_i(x_i,y_i))) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i,y_i),$$

missä siis

$$(107) \qquad v_i(x_i,y_i) = \begin{cases} 1 - \exp(-k_i \overbrace{g_i(x_i,y_i)}^{y_i - x_i}), & \text{kun } y_i > x_i, \\ 0, & \text{kun } y_i \leq x_i. \end{cases}$$

Jotta päästäisiin yhdenmukaiseen esitykseen edellisissä pykälissä esitetyn teorian kanssa, otetaan käyttöön eräitä merkintöjä. Olkoon

$$(108) \qquad f_i(x_i,y_i) = -v_i(x_i,y_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

$$(109) \qquad F(\bar{x},\bar{y}) = -V(\bar{x},\bar{y}),$$

jolloin on voimassa

$$(110) \qquad F(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i,y_i).$$

Edelleen voidaan kirjoittaa

$$(111) \qquad \begin{aligned} \min_{\bar{x}} \max_{\bar{y}} V(\bar{x},\bar{y}) &= \min_{\bar{x}} \left\{ - \min_{\bar{y}} \left[ - V(\bar{x},\bar{y}) \right] \right\} \\ &= - \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} \left[ - V(\bar{x},\bar{y}) \right] = - \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} F(\bar{x},\bar{y}). \end{aligned}$$

Tehtävänä on siis viimein etsiä

$$(112) \qquad v = \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} F(\bar{x},\bar{y}) = \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i,y_i),$$

kun rajoitukset (102) ja (103) ovat voimassa. Optimiratkaisun mukainen kokonaisvahinko on $-v$.

Ryhdyttäessä ratkaisemaan tehtävää (112), voidaan tehdä aluksi muutamia yleisiä huomioita. Vaikka tehtävän luonteesta johtuen muuttujat $x_i$ ja $y_i$ voisivat oikeastaan saada vain kokonaislukuarvoja, oletetaan seuraavassa $x_i$- ja $y_i$-lukujen voivan muuttua jatkuvasti, jotta max min - teorian edellyttämät oletukset olisivat voimassa. Käytännön optimiratkaisu saadaan tällöin, kun teoreettisesta optimiratkaisusta siirrytään johonkin lähimmistä kokonaislukuratkaisuista. Mikäli halutaan tutkia pelkästään kokonaislukuratkaisuja, voidaan käyttää mm. esimerkin 2 ratkaisumenetelmää. Oletetaan siis seuraavassa, että strategiat $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ voivat muuttua jatkuvasti.

Tarkasteluista voidaan sulkea pois tapaus, jolloin puolustaja on täysin ylivoimainen hyökkääjään nähden. Tällainen tilanne vallitsee, kun $X \geq n\,Y$. Ratkaisu on tässä tilanteessa ilmeinen. Pelaaja $P_1$ valitsee nyt strategian $\bar{x}$ siten, että $x_i \geq Y$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ja $\sum_{i=1}^{n} x_i = X$. Valitsipa $P_2$ strategiansa $\bar{y}$ miten hyvänsä, on kukin $f_i(x_i,y_i) = 0$. Näin ollen $v = 0$ ja samalla kokonaisvahinko $- v = 0$. Tämä johtuu siitä, että yksikään hyökkääjä ei pysty läpäisemään puolustusta.

Koska $P_2$ tekee valintansa $P_1$:n jälkeen ja tietää tämän menettelyn, on selvää, että $y_i > 0$ silloin ja vain silloin, kun $y_i > x_i$. Sillä oletetaan, että $P_2$ valitsisi jollakin indeksin arvolla $k$ $0 < \hat{y}_k \leq x_k$. Tällöin olisi $f_k(x_k,\hat{y}_k) = 0$. Nyt $P_2$ saavuttaisi kuitenkin myös valinnalla $y_k = 0$ tuloksen $f_k(x_k,0) = 0$. Hän voisi näin ollen käyttää määrän $\hat{y}_k$ muiden kohteiden hyväksi ilman, että se vaikuttaisi mitenkään $f_k(x_k,y_k)$:n arvoon. Valinta $\hat{y}_k$ ei siis voi olla optimaalinen.

Tehtävän (112) ratkaisut jakaantuvat $P_2$:n menettelyn mukaan ilmeisesti kahteen luonteeltaan erilaiseen tyyppiin. Pelaaja $P_2$ voi joko keskittää voimansa vain yhteen kohteeseen, ts. on tietty kohde $k$, jolloin $y_k = Y$ ja $y_i = 0$ muulloin, tai sitten $P_2$ jakaa voimansa useamman eri kohteen kesken. Jälkimmäisessä tapauksessa hyökkäys voi kohdistua joko kaikkiin kohteisiin tai mahdollisesti vain osaan niistä. Tarkastellaan nyt seuraavaksi mikä tapaus kulloinkin tulee kysymykseen ja millaisiksi strategiat tällöin muodostuvat.

Otetaan ensiksi se tapaus, jolloin $P_2$ jakaa voimansa usean eri kohteen kesken. Edellä esitetyn perusteella on niillä indeksin $i$ arvoilla, joilla $y_i > 0$, myös $y_i > x_i$. Näillä indeksin arvoilla ovat vahinkofunktiot muotoa

$$f_i(x_i,y_i) = \exp(-k_i(y_i - x_i)) - 1. \tag{113}$$



Nämä funktiot $f_i$ ovat derivoituvia sekä $x_i$:n että $y_i$:n suhteen. Tehtävän asettelun perusteella myös muut Gibbs'in lemman vaatimat ehdot ovat voimassa. Näin ollen, mikäli strategia $\bar{y}^o$ antaa funktion $F(\bar{x},\bar{y})$ minimiarvon, on oltava

$$\frac{d}{dy_i}\Big[-f_i(x_i,y_i)\Big]_{y_i=y_i^o} = k_i\exp(-k_i(y_i^o - x_i)) = \mu, \tag{114}$$

kun $y_i^o > 0$. Derivoitavana funktiona on $f_i(x_i,y_i)$:n tilalla $- f_i(x_i,y_i)$, koska nyt on kysymyksessä minimin haku. Vastaavasti, mikäli strategia $\bar{x}^o$ antaa lausekkeen $F(\bar{x},\bar{y}^o) = \min_{\bar{y}} F(\bar{x},\bar{y})$ maksimiarvon, on oltava

$$\frac{d}{dx_i}\Big[f_i(x_i,y_i^o)\Big]_{x_i=x_i^o} = k_i\exp(-k_i(y_i^o - x_i^o)) =$$

$$= \begin{cases} = \lambda, & \text{kun } x_i^o > 0, \\ \leq \lambda, & \text{kun } x_i^o = 0. \end{cases} \tag{115}$$

Ehto (114) on voimassa kaikilla $\bar{x}$:n arvoilla, siis myös kun $\bar{x} = \bar{x}^o$. Näin ollen on

$$k_i\exp(-k_i(y_i^o - x_i^o)) = \mu, \text{ kun } y_i^o > 0. \tag{116}$$

Yhtälön (116) ja (115):n ylemmän rivin perusteella nähdään, että $\lambda = \mu$. Koska (116) on voimassa myös, kun $x_i^o = 0$, on (115):n alemmassakin rivissä oltava voimassa vain yhtäsuuruusmerkki. Ehdot (115) ja (116) supistuvat siten seuraavaan muotoon: välttämätön ehto sille, että strategiapari $(\bar{x}^o,\bar{y}^o)$ olisi tehtävän ratkaisu, on seuraavan yhtälön voimassaolo

$$k_i\exp(-k_i(y_i^o - x_i^o)) = \lambda, \text{ kun } y_i^o > 0 \text{ (samalla } y_i^o > x_i^o). \tag{117}$$

Yhtälön (117) ratkaisuksi saadaan

$$y_i^o - x_i^o = (1/k_i)\log(k_i/\lambda). \tag{118}$$

Luku $\lambda$ on toistaiseksi tuntematon. Entä milloin $y_i^o > 0$? Komponentti $y_i^o > 0$ silloin ja vain silloin, kun $y_i^o > x_i^o$

eli kun $\exp(-k_i(y_i^o - x_i^o)) \leq 1$ eli viimein kun $k_i > \lambda$. Pelaaja $P_2$ tekee siis valintansa lukujen $k_i$ perusteella. Nyt on selvää, että myös $P_1$ valitsee $x_i^o = 0$, kun $k_i \leq \lambda$. Sillä jos $k_i \leq \lambda$, ei $P_1$:n kannata valita $x_i^o > 0$, koska $P_2$ tulee kuitenkin valitsemaan $y_i^o = 0$. Luku $\lambda$ voidaankin jo määrätä. Saadaan

$$(119) \qquad Y - X = \sum_{i=1}^{n}(y_i^o - x_i^o) = \sum_{y_i^o > 0}(y_i^o - x_i^o) = \sum_{k_i > \lambda}\frac{1}{k_i}\log\frac{k_i}{\lambda}.$$

Yhtälöllä (119) on yksikäsitteinen ratkaisu $\lambda$. Merkitään $h(\lambda)$:lla (119):n oikeanpuoleista lauseketta. Olkoon $\alpha = \max_{1\leq i\leq n} k_i$ ja $\beta = \min_{1\leq i\leq n} k_i$. Kun $\lambda < \beta$, esiintyvät kaikki termit $(1/k_i)\log(k_i/\lambda)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ summassa, joten kun $\lambda$ on kyllin pieni, saa $h(\lambda)$ mielivaltaisen suuria arvoja, erikoisesti suurempia kuin $Y - X$. Toisaalta, kun $\lambda \geq \alpha$, on $h(\lambda) = 0$. Edelleen $h(\lambda)$ on $\lambda$:n vähenevä funktio, kun $0 < \lambda \leq \alpha$, sillä summan yhteenlaskettavat ovat väheneviä funktioita ja niiden lukumäärässä voi tapahtua vain vähenemistä. Funktio $h(\lambda)$ on myös jatkuva $\lambda$:n positiivisilla arvoilla, sillä yhteenlaskettavat ovat jatkuvia ja kun jokin termi jää pois summasta ($\lambda$ saavuttaa jonkin arvon $k_i$), niin sillä on juuri sillä hetkellä arvo 0. Edellä olevan perusteella voidaan päättää, että $h(\lambda)$ saa arvon $Y - X$ tarkalleen yhdessä pisteessä $\lambda$. Tämä $\lambda$ on (119):n yksikäsitteinen ratkaisu.

Mikäli tehtävällä (112) on ratkaisu, jossa $y_i^o > 0$ useammalla kuin yhdellä i:n arvolla, saadaan se siis selville seuraavasti. Määrätään ensin $\lambda$ yhtälöstä (119). Sen jälkeen on $P_1$:n strategia $\bar{x}^o$ valittava siten, että

$$(120) \qquad \begin{cases} x_i^o = 0, \text{ kun } k_i \leq \lambda, \\ x_i^o \geq 0, \text{ kun } k_i > \lambda, \ \sum_{k_i>\lambda} x_i^o = X. \end{cases}$$

Pelaajan $P_2$ strategiaksi $\bar{y}^o$ muodostuu tällöin

$$(121) \qquad \begin{cases} y_i^o = 0, \text{ kun } k_i \leq \lambda, \\ y_i^o = x_i^o + (1/k_i)\log(k_i/\lambda), \text{ kun } k_i > \lambda. \end{cases}$$



"Pelin arvoksi" v saadaan

$$v = F(\bar{x}^o,\bar{y}^o) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^o,y_i^o)$$

$$(122) \qquad = \sum_{k_i>\lambda}\left\{\exp(-k_i(y_i^o - x_i^o) - 1\right\}$$

$$= \sum_{k_i>\lambda}\left(\frac{\lambda}{k_i} - 1\right) = \lambda\sum_{k_i>\lambda}(1/k_i) - m,$$

missä m on niiden lukujen $k_i$ lukumäärä, jotka ovat $> \lambda$. Pelaaja $P_2$ aiheuttaa hyökkäyksellään $P_1$:lle vahingon

$$(123) \qquad m - \lambda\sum_{k_i>\lambda} 1/k_i.$$

Tarkastellaan toiseksi sitä tilannetta, jolloin $P_2$ keskittää koko voimansa yhteen kohteeseen r $(1 \leq r \leq n)$. Pelaajan $P_1$ on nyt valittava strategia $\bar{x}^o$ siten, että

$$(124) \qquad \max_{\bar{x}}\min_{\bar{y}}\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i,y_i)\right\} = \max_{\bar{x}}\left\{\exp(-k_r(Y - x_r) - 1\right\}$$

saavutetaan, kun $\bar{x} = \bar{x}^o$. Kyseinen maksimiarvo ilmeisesti saavutetaan, kun

$$(125) \qquad k_r(Y - x_r^o) = k_i(Y - x_i^o) \quad (i = 1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,n).$$

Yhtälöstä (125) saadaan ratkaisemalla

$$(126) \qquad x_i^o = \frac{k_r}{k_i}x_r^o + \left(1 - \frac{k_r}{k_i}\right)Y \quad (i \neq r).$$

Koska pelaajan $P_1$ on tehtävä valintansa siten, että (102) toteutuu, on oltava

$$(127) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^o = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{n}\left\{\frac{k_r}{k_i}x_r^o + \left(1 - \frac{k_r}{k_i}\right)Y\right\} + x_r^o = X,$$

mistä ratkaisemalla

$$(128) \qquad x_r^o = Y - \frac{nY - X}{k_r\sum_{j=1}^{n}(1/k_j)}.$$

Yhtälöiden (126) ja (128) perusteella saadaan muiden komponenttien arvoiksi ($i \neq r$)

(129) $$x_i^o = Y - \frac{nY - X}{k_i \sum_{j=1}^{n}(1/k_j)} .$$

Huomataan, että (128) ja (129) ovat aivan samaa muotoa. Näin ollen yhtälö (129) on voimassa kaikilla i:n arvoilla ($1 \leq i \leq n$). Pelin arvo v on

$$v = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^o, y_i^o)$$

(130) $$= \exp\left\{-k_r\left[Y - \left(Y - \frac{nY - X}{k_r \sum_{j=1}^{n}(1/k_j)}\right)\right]\right\} - 1$$

$$= \exp\left(- \frac{nY - X}{\sum_{j=1}^{n}(1/k_j)}\right) - 1.$$

Pelaajalle $P_1$ aiheutuva kokonaisvahinko on siten

(131) $$1 - \exp\left(- \frac{nY - X}{\sum_{j=1}^{n}(1/k_j)}\right).$$

Ratkaisu muodostui siis tässä toisessa tapauksessa seuraavanlaiseksi. Pelaaja $P_1$ valitsee strategiansa yhtälön (129) mukaisesti, $P_2$ puolestaan hyökkää vain yhteen kohteeseen r, joka voi olla mikä tahansa kohteista 1,2,...,n. Syntyvän kokonaisvahingon ilmoittaa lauseke (131).

Vielä on ratkaisematta, kumpi edellä esitetyistä vaihtoehdoista kulloinkin tulee kysymykseen. Ensinnäkin on selvää, että tyyppiä (120) - (122) oleva ratkaisu voi olla mahdollinen vain, kun $Y > X$. Tämä seikka kävi selville johdettaessa kyseistä ratkaisua. Siis mikäli $Y \leq X$, on $P_1$:n optimistrategia (129):n mukainen ja $P_2$ valitsee yhden kohteista 1,2,...,n. Tapauksessa $Y > X$ on tilanne jonkin verran monimutkaisempi. Tällöin määrätään ensin strategiat $\bar{x}^o$ ja $\bar{y}^o$ yhtälöiden (120) - (121) mukaisesti ($\lambda$ onlaskettu kaavasta (119)). Luku v saadaan (122):n avulla. Onko näin muodostettu ratkaisu optimaalinen? Vastaus saadaan seuraavasti. Määrätään luvut $v_i'$, missä $v_i'$ on funktion $F(\bar{x},\bar{y})$ arvo, kun $P_1$ noudattaa yllä mainittua strategiaa ja $P_2$ keskittää koko voimansa kohteeseen i. Mikäli jokin luvuista $v_i'$ on $< v$, ei yhtälöiden (120) - (122) mukainen ratkaisu voi olla optimaalinen, sillä $P_2$ saavuttaisi paremman tuloksen poikkeamalla (121):n mukaisesta menettelystä (valitsemalla ainoastaan yhden tietyn kohteen i). Ratkaisun on oltava tässä tapauksessa sellainen, että $P_1$ toimii (129):n mukaan ja $P_2$ valitsee minkä tahansa kohteista 1,2,...,n.



<u>Esimerkki 2.</u> Tarkastellaan toisena esimerkkinä edellä käsiteltyä hyökkäys - puolustus tilannetta hieman muunnettuna. Oletetaan nyt, että puolustaja osuu korkeintaan yhteen hyökkääjään osumisen todennäköisyyden ollessa p. Muilta osin tehtävä on esimerkissä 1 esitetyn kaltainen. Koska tehtävään tuli nyt todennäköisyyden p mukana tietty sattumanvaraisuus, ei syntyvää kokonaisvahinkoa voida ennalta laskea. Sen sijaan voidaan kokonaisvahingon odotusarvo määrätä. Tämä odotusarvo edustaa nyt päätösfunktiota, ja pelaajien optimointitoimenpiteet kohdistuvat sen suuruuteen. Käytetään myös tästä odotusarvosta merkintää $V(\bar{x},\bar{y})$. Vektorit $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat pelaajien valitsemia strategioita.

Oletetaan nyt, että $P_1$ ja $P_2$ ovat tehneet tietyt valinnat $\bar{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ja $\bar{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Todennäköisyys, että puolustaja tuhoaa l hyökkääjää kohteessa i ($i = 1,2,\ldots,n$), on

(132) $$P_{x_i}(l) = \binom{x_i}{l} p^l (1 - p)^{x_i - l}.$$

Tässä yhtälössä on tietysti $0 \leq l \leq x_i$. Toisaalta on myös $l \leq y_i$. On siis oltava $0 \leq l \leq \min(x_i,y_i) = m_i$. Kohde i kärsii siis keskimäärin vahingon

(133) $$v_i(x_i,y_i) = \sum_{l=0}^{m_i} P_{x_i}(l)\left\{1 - \exp(-k_i(y_i - l))\right\}.$$

Syntyvän kokonaisvahingon odotusarvo saadaan näin ollen yhtälöstä

$$(134)\qquad V(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{m_i} P_{x_i}(l)\left\{1 - \exp(-k_i(y_i - l)\right\}.$$

Pelaaja $P_1$ yrittää saada funktion $V(\bar{x},\bar{y})$ arvon mahdollisimman pieneksi, $P_2$ taas mahdollisimman suureksi. Etsitään siis strategioita $\bar{x}^o$ ja $\bar{y}^o$, jotka toteuttavat ehdon

$$(135)\qquad V(\bar{x}^o,\bar{y}^o) = \min_{\bar{x}} \max_{\bar{y}} V(\bar{x},\bar{y}).$$

Yllä olevassa yhtälössä olevat maksimin ja minimin haut suoritetaan vain niiden strategioiden $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ joukosta, jotka toteuttavat ehdot (102) ja (103). Otetaan taas käyttöön merkinnät

$$(136)\qquad f_i(x_i,y_i) = -\, v_i(x_i,y_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

$$(137)\qquad F(\bar{x},\bar{y}) = -\, V(\bar{x},\bar{y}).$$

Tällöin on

$$(138)\qquad F(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i,y_i).$$

Tehtävänä on nyt siis etsiä sellaiset strategiat $\bar{x}^o$ ja $\bar{y}^o$ sekä sellainen luku v, että

$$(139)\qquad v = F(\bar{x}^o,\bar{y}^o) = \max_{\substack{\sum_{i=1}^{n} x_i = X\\ x_i \geq 0}} \ \min_{\substack{\sum_{i=1}^{n} y_i = Y\\ y_i \geq 0}} F(\bar{x},\bar{y}).$$

Kokonaisvahingon odotusarvon ilmoittaa luku $-$ v.

Huomataan, että päädyttiin tehtävään, jossa tulevat kysymykseen vain kokonaislukuratkaisut, sillä todennäköisyyden ilmoittava lauseke $P_{x_i}(l)$ on määritelty vain, kun $x_i$ on kokonaisluku. Edellisissä pykälissä esitetystä max min-teoriasta ei siis ole apua tämän tehtävän ratkaisua etsittäessä. Mutta kokonaislukustrategioista johtuu, että tehtävä sopii hyvin ratkaistavaksi dynaamisen ohjelmoinnin menetelmin. Dynaamisen ohjelmoinnin keinoin tehtäviä ratkaistaessa syntyy aina tiettyjä taulukoita, jotka kokonaislukuoptimoinnin kyseessä ollessa saadaan täydellisiksi. Näin vältytään mm. interpolaatiovirheiltä.



Noudatetaan ratkaisun etsinnässä dynaamisen ohjelmoinnin yleisiä menettelytapoja. Määrätään ensin kummankin pelaajan optimimenettely, kun kohteita on vain yksi. Tämän jälkeen lisätään kohteiden luku kahdeksi ja määrätään taas optimistrategiat käyttäen hyväksi edellisen vaiheen tuloksia. Näin jatketaan, kunnes kaikki kohteet ovat mukana strategioita valittaessa. On samantekevää, missä järjestyksessä kohteet otetaan mukaan. Selvyyden vuoksi kuitenkin oletetaan, että aloitetaan kohteesta n:o 1 ja edetään numerojärjestyksessä.

Merkitään

$$(140)\qquad f_k^{*}(x,y) = \max_{\sum_{i=1}^{k} x_i = x} \ \min_{\sum_{i=1}^{k} y_i = y} \left\{\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j,y_j)\right\},$$

missä lisäksi on oltava $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,k)$. Määritelmän (140) mukaan $f_k^{*}(x,y)$ on päätösfunktion optimiarvo, kun kohteita on k kpl ja $P_1$:llä on käytettävissään puolustajia määrä x ja $P_2$:lla hyökkääjiä määrä y. Tämän mukaan on ilmeisesti

$$(141)\qquad v = f_n^{*}(X,Y).$$

Funktion arvon $f_n^{*}(X,Y)$ laskemiseksi on tunnettava funktion $f_{n-1}^{*}$ arvot; näiden laskeminen taas edellyttää funktion $f_{n-2}^{*}$ arvojen tuntemista jne. Lähdetään tämän johdosta liikkeelle funktiosta $f_1^{*}$. Tällöin on

$$(142)\qquad \begin{aligned} f_1^{*}(x,y) &= \max_{x_1=x} \ \min_{y_1=y} f_1(x_1,y_1) = f_1(x,y)\\ &= \sum_{l=0}^{\min(x,y)} P_x(l)\left\{\exp(-k_1(y - l)) - 1\right\}. \end{aligned}$$

Taulukoidaan funktion $f_1^{*}(x,y)$ arvot, kun $0 \leq x \leq X$ ja $0 \leq y \leq Y$. Taulukkoon tulee siis kaikkiaan $(X + 1)(Y + 1)$ lukua. Merkitään symboleilla $\hat{x}_1(x,y)$ ja $\hat{y}_1(x,y)$ niitä $x_1$-ja $y_1$-lukuja, joilla kaavassa (142) esiintyvä minimiarvojen maksimiarvo saavutetaan. Nähdään, että

(143) $$\hat{x}_1(x,y) = x,$$

(144) $$\hat{y}_1(x,y) = y.$$

Taulukoidaan myös $\hat{x}_1$- ja $\hat{y}_1$-luvut samoilla argumentin arvoilla kuin funktio $f_1^{*}(x,y)$.

Toisessa vaiheessa, kun kohteita on kaksi, saadaan

$$f_2^{*}(x,y) = \max_{x_1+x_2=x} \min_{y_1+y_2=y} \left\{f_1(x_1,y_1) + f_2(x_2,y_2)\right\}$$

(145) $$= \max_{0\le x_2\le x} \min_{0\le y_2\le y} \left\{f_2(x_2,y_2) + f_1(x-x_2,y-y_2)\right\}$$

$$= \max_{0\le x_2\le x} \min_{0\le y_2\le y} \left\{f_2(x_2,y_2) + f_1^{*}(x-x_2,y-y_2)\right\}.$$

Funktion $f_2^{*}(x,y)$ arvot voidaan näin laskea, koska funktion $f_1^{*}(x,y)$ arvot tunnetaan. Tehdään taas taulukko $f_2^{*}(x,y)$ -arvoista, kun $0 \le x \le X$ ja $0 \le y \le Y$. Samalla taulukoidaan luvut $\hat{x}_2(x,y)$ ja $\hat{y}_2(x,y)$ eli ne $x_2$- ja $y_2$-arvot, jotka antavat (145):n mukaisen optimituloksen. Näin jatketaan edelleen. Yleisesti on $(k = 2,3,\ldots,n)$

$$f_k^{*}(x,y) = \max_{\sum_{i=1}^{k} x_i=x} \min_{\sum_{i=1}^{k} y_i=y} \left\{\sum_{j=1}^{k} f_j(x_j,y_j)\right\}$$

$$= \max_{\sum_{i=1}^{k} x_i=x} \min_{\sum_{i=1}^{k} y_i=y} \left\{f_k(x_k,y_k) + \sum_{j=1}^{k-1} f_j(x_j,y_j)\right\}$$

(146) $$= \max_{0\le x_k\le x} \min_{0\le y_k\le y} \left\{f_k(x_k,y_k) + \max_{\sum_{i=1}^{k-1} x_i=x-x_k} \min_{\sum_{i=1}^{k-1} y_i=y-y_k} \left[\sum_{j=1}^{k-1} f_j(x_j,y_j)\right]\right\}$$

$$= \max_{0\le x_k\le x} \min_{0\le y_k\le y} \left\{f_k(x_k,y_k) + f_{k-1}^{*}(x-x_k,y-y_k)\right\}.$$

Funktion $f_k^{*}(x,y)$ arvot voidaan siis laskea funktion $f_{k-1}^{*}(x,y)$ arvojen perusteella. Taulukoidaan siksi kaikkien funktioiden $f_k^{*}(x,y)$ arvot, kun $0 \le x \le X$ ja $0 \le y \le Y$. Samalla taulukoidaan $\hat{x}_k(x,y)$- ja $\hat{y}_k(x,y)$-luvut, jotka määritellään samoin kuin tapauksessa $k = 2$. Näin jatketaan, kunnes tullaan vaiheeseen $k = n$. Tällöin ei tarvita enää taulukointia. Lasketaan vain arvo $f_n^{*}(X,Y)$. Tämä arvo on (141):n mukaan $= v$. Lopuksi on vielä määrättävä $P_1$:n ja $P_2$:n optimistrategiat $\bar{x}^o$ ja $\bar{y}^o$. Ensinnäkin on ilmeisesti



(147) $$x_n^o = \hat{x}_n(X,Y),$$

(148) $$y_n^o = \hat{y}_n(X,Y).$$

Tämä seuraa suoraan lukujen $\hat{x}_n$ ja $\hat{y}_n$ määritelmistä. Kohteeseen n:o n tulevat joukot on siis määrätty. Kohteita $1,2,\ldots, n-1$ varten on jäljellä seuraavat miesvahvuudet: $P_1$:llä $X - x_n^o$ puolustajaa ja $P_2$:lla $Y - y_n^o$ hyökkääjää. Kohteeseen n:o $n-1$ tulee tämän mukaan joukkoja määrät

(149) $$x_{n-1}^o = \hat{x}_{n-1}(X-x_n^o,Y-y_n^o),$$

(150) $$y_{n-1}^o = \hat{y}_{n-1}(X-x_n^o,Y-y_n^o).$$

Samalla tavalla jatketaan vaihe kerrallaan. Yleisesti kohteeseen n:o $n - k$ $(k = 1,2,\ldots,n-1)$ tulevien joukkojen määrät saadaan yhtälöistä

(151) $$x_{n-k}^o = \hat{x}_{n-k}\left(X - \sum_{i=0}^{k-1} x_{n-i}^o,\ Y - \sum_{i=0}^{k-1} y_{n-i}^o\right),$$

(152) $$y_{n-k}^o = \hat{y}_{n-k}\left(X - \sum_{i=0}^{k-1} x_{n-i}^o,\ Y - \sum_{i=0}^{k-1} y_{n-i}^o\right).$$

Tehtävä on näin kokonaisuudessaan ratkaistu. Pelaaja $P_1$ menettelee yhtälöiden (147) ja (151) mukaisella tavalla, $P_2$ puolestaan yhtälöiden (148) ja (152) mukaan. "Pelin arvo" v saadaan yhtälöstä (141). Syntyvän kokonaisvahingon odotusarvo on $= - v$.

Tehtävän käytännöllisestä ratkaisemisesta on mainittava, että siihen tarvitaan tietokoneiden apua, mikäli kiistanalaisten kohteiden lukumäärä n on vähänkin suuri, yleensä jo, kun $n > 2$. Tämän esityksen loppuun onkin liitetty FORTRAN - ohjelma ko. tehtävän ratkaisemiseksi sekä eräitä ratkaisuja, jotka on laskettu Turun Yliopiston Sovelletun matematiikan IBM 1130 - tietokonetta hyväksi käyttäen.

```
PAGE   1

// JOB T

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL   PHY DRIVE
  0000        0001        0001         0000

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
      FUNCTION G0162(X)
      IF(X) 1,1,2
    1 G0162 Ä 1.
      RETURN
    2 FX Ä 1.
      N Ä X + 0.1
      DO 3 I Ä 1,N
    3 FX Ä FX * I
      G0162 Ä FX
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR G0162
 COMMON      0  VARIABLES       6  PROGRAM      64

 END OF COMPILATION

// DUP

*STORE       WS  UA  G0162
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
      FUNCTION F0162(I,J,P,V)
      F0162 Ä 0.
      IF (I - J) 1,2,2
    1 MIN Ä I
      GO TO 3
    2 MIN Ä J
    3 MINIM Ä MIN + 1
      DO 4 LL Ä 1,MINIM
      L Ä LL - 1
      XI Ä I
      YI Ä J
      RL Ä L
      BIN Ä G0162(XI)/(G0162(XI-RL)*G0162(RL))
      BIN Ä BIN*P**L*(1.-P)**(I-L)
      X Ä V*(YI-RL)
      TERMI Ä BIN*(EXP(-X)-1.)
    4 F0162 Ä F0162 + TERMI
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR F0162
 COMMON      0  VARIABLES      26  PROGRAM     168

 END OF COMPILATION

// DUP

*STORE       WS  UA  F0162
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET

// FOR
*IOCS(1132 PRINTER)
*IOCS(CARD)
```



```
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
      DIMENSION IY00(5,11,11),IXOPT(5),IYOPT(5)
      DIMENSION V(5),F(5,11,11),FOPT(5,11,11),IX00(5,11,11)
    1 READ (2,71) N,IXTOT,IYTOT,P,(V(I),IÄ1,N)
      IF (N) 11,11,2
    2 IX1 Ä IXTOT + 1
      IY1 Ä IYTOT + 1
      VI Ä V(1)
      DO 3 I Ä 1,IX1
      DO 3 J Ä 1,IY1
      F(1,I,J) Ä F0162(I-1,J-1,P,VI)
      FOPT(1,I,J) Ä F(1,I,J)
      IX00(1,I,J) Ä I - 1
    3 IY00(1,I,J) Ä J - 1
      DO 4 I Ä 2,N
      VI Ä V(I)
      DO 4 IX Ä 1,IX1
      DO 4 IY Ä 1, IY1
    4 F(I,IX,IY) Ä F0162(IX-1,IY-1,P,VI)
      DO 9 I Ä 2,N
      DO 9 IXX Ä 1,IX1
      DO 9 IYY Ä 1,IY1
      FMAX Ä -2.
      DO 8 IX Ä 1,IXX
      FMIN Ä 1.
      IXERO Ä IXX - IX + 1
      DO 6 IY Ä 1,IYY
      IYERO Ä IYY - IY + 1
      FUN Ä F(I,IX,IY) + FOPT(I-1,IXERO,IYERO)
      IF (FMIN - FUN) 6,6,5
    5 FMIN Ä FUN
      IYO Ä IY - 1
    6 CONTINUE
      IF (FMAX - FMIN) 7,8,8
    7 FMAX Ä FMIN
      IX00(I,IXX,IYY) Ä IX - 1
      IY00(I,IXX,IYY) Ä IYO
    8 CONTINUE
    9 FOPT(I,IXX,IYY) Ä FMAX
      F00 Ä FOPT(N,IX1,IY1)
      IXSUM Ä 0
      IYSUM Ä 0
      DO 10 J Ä 1,N
      I Ä J - 1
      NI Ä N - I
      IXERO Ä IX1 - IXSUM
      IYERO Ä IY1 - IYSUM
      IXOPT(NI) Ä IX00(NI,IXERO,IYERO)
      IYOPT(NI) Ä IY00(NI,IXERO,IYERO)
      IXSUM Ä IXSUM + IXOPT(NI)
   10 IYSUM Ä IYSUM + IYOPT(NI)
      F00 Ä -F00
      WRITE (3,70)
      WRITE  (3,80) N
       WRITE (3,72)
       WRITE (3,73) IXTOT,IYTOT
       WRITE (3,74) P
       WRITE (3,75)
       WRITE (3,76) (I,V(I),IÄ1,N)
       WRITE (3,77)
       WRITE (3,78) (I,IXOPT(I),I,IYOPT(I),IÄ1,N)
       WRITE (3,79) F00
      GO TO 1
   11 STOP
   70 FORMAT (1H1,7X,ÖKOHTEIDEN LUKUMÄÄRÄÖ)
   71 FORMAT (3I2,F2.2,5F2.1)
   72 FORMAT (ÖÖKÄYTETTÄVISSÄ OLEVAT MIESVAHVUUDETÖ/)
   73 FORMAT (9X,1HP,I4,8X,1HP,I4/10X,1H1,12X,1H2//)
   74 FORMAT (Ö PUOLUSTAJAN OSUMISTODENNÄKÖÖISYYSÖ//16X,F5.2//)
   75 FORMAT (Ö KOHTEIDEN VAHINGOITTUMISALTTIUDETÖ/)
   76 FORMAT (10X,ÖKOHDEÖ,I3,F9.2)
   77 FORMAT (2H0 /5X,ÖPELAAJIEN OPTIMISTRATEGIATÖ/)
   78 FORMAT (9X,1HX,I2,I4,4X,1HY,I2,I4)
   79 FORMAT (2H0 /Ö PUOLUSTAJAN KÄRSIMÄ KOKONAISVAHINKOÖ//14X,F7.4)
   80 FORMAT (1H0,16X,I2/)
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON      0  VARIABLES    3686  PROGRAM     810

 END OF COMPILATION
```

KOHTEIDEN LUKUMÄÄRÄ

5

KÄYTETTÄVISSÄ OLEVAT MIESVAHVUUDET

$P_1$ 8 $P_2$ 8

PUOLUSTAJAN OSUMISTODENNÄKÖISYYS

0.75

KOHTEIDEN VAHINGOITTUMISALTTIUDET

| | | |
|---|---|---|
| KOHDE | 1 | 1.00 |
| KOHDE | 2 | 0.90 |
| KOHDE | 3 | 0.80 |
| KOHDE | 4 | 0.70 |
| KOHDE | 5 | 0.50 |

PELAAJIEN OPTIMISTRATEGIAT

| | | | |
|---|---|---|---|
| X 1 | 2 | Y 1 | 3 |
| X 2 | 2 | Y 2 | 0 |
| X 3 | 2 | Y 3 | 0 |
| X 4 | 1 | Y 4 | 3 |
| X 5 | 1 | Y 5 | 2 |

PUOLUSTAJAN KÄRSIMÄ KOKONAISVAHINKO

1.9767



KOHTEIDEN LUKUMÄÄRÄ

5

KÄYTETTÄVISSÄ OLEVAT MIESVAHVUUDET

$P_1$ 10 $P_2$ 6

PUOLUSTAJAN OSUMISTODENNÄKÖISYYS

0.70

KOHTEIDEN VAHINGOITTUMISALTTIUDET

| | | |
|---|---|---|
| KOHDE | 1 | 1.00 |
| KOHDE | 2 | 0.80 |
| KOHDE | 3 | 0.50 |
| KOHDE | 4 | 0.30 |
| KOHDE | 5 | 0.20 |

PELAAJIEN OPTIMISTRATEGIAT

| | | | |
|---|---|---|---|
| X 1 | 8 | Y 1 | 0 |
| X 2 | 0 | Y 2 | 0 |
| X 3 | 1 | Y 3 | 5 |
| X 4 | 1 | Y 4 | 0 |
| X 5 | 0 | Y 5 | 1 |

PUOLUSTAJAN KÄRSIMÄ KOKONAISVAHINKO

1.0619

KOHTEIDEN LUKUMÄÄRÄ

4

KÄYTETTÄVISSÄ OLEVAT MIESVAHVUUDET

$P_1$ 7 $P_2$ 7

PUOLUSTAJAN OSUMISTODENNÄKÖISYYS

0.50

KOHTEIDEN VAHINGOITTUMISALTTIUDET

| | | |
|---|---|---|
| KOHDE | 1 | 1.00 |
| KOHDE | 2 | 0.80 |
| KOHDE | 3 | 0.50 |
| KOHDE | 4 | 0.30 |

PELAAJIEN OPTIMISTRATEGIAT

| | | | |
|---|---|---|---|
| X 1 | 3 | Y 1 | 4 |
| X 2 | 3 | Y 2 | 0 |
| X 3 | 1 | Y 3 | 2 |
| X 4 | 0 | Y 4 | 1 |

PUOLUSTAJAN KÄRSIMÄ KOKONAISVAHINKO

1.6542



KOHTEIDEN LUKUMÄÄRÄ

4

KÄYTETTÄVISSÄ OLEVAT MIESVAHVUUDET

$P_1$ 7 $P_2$ 7

PUOLUSTAJAN OSUMISTODENNÄKÖISYYS

0.90

KOHTEIDEN VAHINGOITTUMISALTTIUDET

| | | |
|---|---|---|
| KOHDE | 1 | 1.00 |
| KOHDE | 2 | 0.50 |
| KOHDE | 3 | 0.40 |
| KOHDE | 4 | 0.10 |

PELAAJIEN OPTIMISTRATEGIAT

| | | | |
|---|---|---|---|
| X 1 | 5 | Y 1 | 6 |
| X 2 | 0 | Y 2 | 1 |
| X 3 | 2 | Y 3 | 0 |
| X 4 | 0 | Y 4 | 0 |

PUOLUSTAJAN KÄRSIMÄ KOKONAISVAHINKO

1.1280

## Kirjallisuusluettelo


[1] Danskin, J. M: The theory of max-min and its application to weapon allocation problems, Heidelberg 1967

[2] Graves, L.G: The theory of functions of real variables, Nex York 1946

[3] Hadley, G: Nonlinear and dynamic programming, Reading, Mass. 1964

[4] Kakutani, S: A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math. J. 8, N:o 3, 457 - 459 (1941)