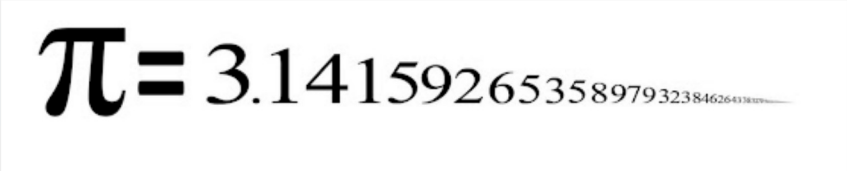
Lisää Luo blogi Kirjaudu sisään

VAASA ENNEN JA NYT - VASA FÖRR OCH NU

Sitoutumaton ja vapaa blogi. Myös Sinun kirjoituksillesi ja kuvillesi!

keskiviikko 14. tammikuuta 2026

Verot valtion maksettaviksi ja piin (π) arvoksi 3!



Ilkka Virtanen

Vanhan kaupunkilegendan mukaan kansanedustaja Veikko Vennamo olisi esittänyt otsikossa esiintyvän vaatimuksen eduskunnan puhuja-aitiossa budjettikeskusteluun liittyvän puheenvuoronsa yhteydessä. Onpa tämä totta (tuskin) tai ei, molemmat vaatimukset ovat mahdottomia toteuttaa. Verojen maksun siirtäminen valtiolle merkitsisi välitöntä kaaosta valtiontaloudessa ja matematiikan ehkä tunnetuimman symbolin arvon muuttaminen veisi pohjan geometrian ja aritmetiikan oppirakennelmilta, niihin perustuvilta matematiikan muilta alueilta ja lukemattomilta käytännön, erityisesti teknillisiltä, sovelluksilta. Mikä tämä vakioarvoinen symboli – suoranainen matemaattinen ikoni – sitten on? Milloin se on syntynyt tai löydetty, mihin se matematiikassa erityisesti liittyy ja miten sen numeerinen arvo on määritetty? Muun muassa näitä kysymyksiä tarkastelen seuraavassa.

Yksiselitteinen ja muuttumaton irrationaaliluku

Käytännössä jokainen koulusivistystä saava henkilö kohtaa piin, jonka symbolina on kreikkalainen kirjain π (pii). Suomessa kohtaaminen tapahtuu viimeistään peruskoulun yläasteella. Aikuisina kaikki vielä muistanevat, että pii liittyy jotenkin ympyröihin, useat senkin, että se ilmaisee ympyrän kehän ja halkaisijan välisen suhteen, ehkä vielä lukuarvonkin, joka on likimäärin 3,14.

Pii on matemaattinen vakio, luku, jonka arvo on kiinteä ja yksiselitteinen. Sen numeroarvoa ei voida kuitenkaan tarkasti ilmoittaa, koska π on irrationaaliluku. Matemaattiset luvut ovat kokonaislukuja, rationaalilukuja tai irrationaalilukuja. Kokonaisluvut ovat ”luonnollisia” lukuja 0, 1, 2, 3 jne. Rationaaliluvut ovat lukuja, jotka voidaan esittää kahden kokonaisluvun suhteena, kuten esimerkiksi ½. Rationaaliluvusta voi käyttää myös desimaaliesitystä: ½ = 0,5. Tässä tapauksessa desimaaliluku on päättyvä, tarkka lukuarvo. Rationaaliluvun desimaaliesitys voi olla myös päättymätön, jonka tarkkuus kasvaa desimaalien lukumäärän kasvaessa, esimerkiksi 1/3 = 0,33333…. jne. Irrationaaliluvun ainoa muoto on päättymätön desimaaliluku, jota ei voi esittää kokonaislukujen suhteena. Pii on tällainen luku.

Vuosituhansia vanha historia

Piin historia on yhtä vanha kuin matematiikan historia. Piin ominaisuuksien lisätuntemus on usein merkinnyt samalla matematiikan kehittymistä. Melkein kaikki historian tärkeimmistä matemaatikoista ovat osaltaan lisänneet tietämystä piistä. Vaikka piin numeerinen arvo tunnetaan nykyään jo äärimmäisellä tarkkuudella (tunnetaan yli 300 biljoonaa piin ensimmäistä desimaalia), desimaaleja etsitään edelleen lisää. Kiinnostuksen kohde ei olekaan lisädesimaaleissa (paitsi tieteellisessä ”urheiluhengessä”), vaan laskennassa

Osallistujat

- Aimo Nyberg
- Ansku
- Maisa
- Matti Nyberg

Blogiarkisto

▼ 2026 (5)
▼ tammikuuta (5)
Verot valtion maksettaviksi ja piin (π) arvoksi 3!
Alexandra Frosterus-Såltin - Suomen katsotuin tait...
Tietokirjallisuuden Finlandia ehdokas v. 2025: MUO...
Loppiaisen vietto
Knut Nybergin talvinen valokuva sadan vuoden takaa

► 2025 (177)
► 2024 (161)
► 2023 (167)
► 2022 (167)
► 2021 (170)
► 2020 (193)
► 2019 (221)
► 2018 (196)
► 2017 (282)
► 2016 (209)
► 2015 (201)
► 2014 (167)
► 2013 (175)
► 2012 (137)
► 2011 (115)

Tunnisteet

Ilmoita väärinkäytöstä

TERVETULOA - VÄLKOMMEN!

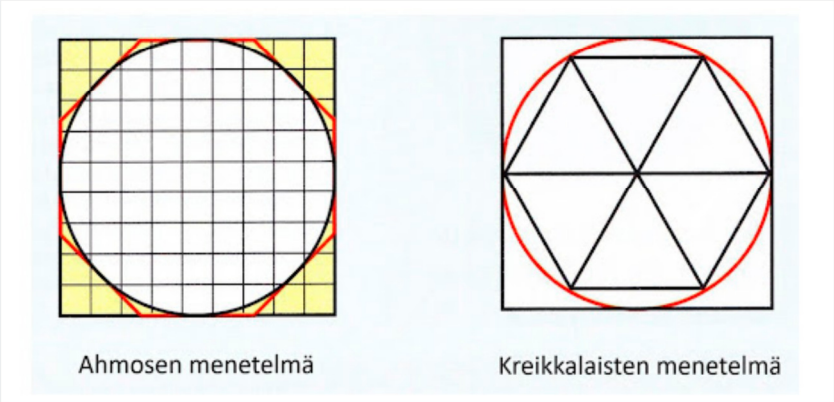
Myös Sinä voit julkaista tässä blogissa kirjoituksiasi ja kuviasi! Kaikki tekijäinoikeudet & vastuut kirjoittajilla ja kuvaajilla!

tarvittavien algoritmien kehittämisessä ja tietokonekokonaisuuksien testaamisessa, laskennat vaativat tietokoneiden jättikoalitioilta kuukausien mittaisen laskentatyön ja valtavat tallennetilat.

Piin universaalisuudesta kertoo jotakin se, että tämän ikonisen luvun olemassaolo tunnettiin jo Raamatun vanhassa testamentissa (ei vielä piin nimellä, nimi otettiin käyttöön vasta 1700-luvulla). Ensimmäisessä kuninkaiden kirjassa vakion lukuarvona on 3: ”Hiram valoi myös pyöreän altaan, jota kutsuttiin mereksi. Se oli reunasta reunaan kymmenen kyynärän levyinen, korkeutta sillä oli viisi kyynärää, ja vasta kolmenkymmenen kyynärän pituinen mittanuora ulottui sen ympäri”.

Noin 2 000 vuotta ennen ajanlaskun alkua babylonialaiset otaksuivat, että π on joko 3 tai 25/8 (= 3,1250... eli yksi desimaali oikein). Myös likiarvo 22/7 (= 3,1429... eli kaksi desimaalia oikein) oli tiedossa varhain.

Egyptiläinen Ahmose on matematiikan historiassa ensimmäinen nimeltä tunnettu matemaatikko. Hän esitti noin 1550 eaa. geometriaan perustuvan tavan π:n arvon määrittämiseksi. Hän osoitti, että ympyrän pinta-ala on likimain yhtä suuri kuin neliön, jonka sivu on 8/9 ympyrän halkaisijasta. Tämä vastaa π:n likiarvoa 256/81 eli noin 3,16. Ahmose otti käyttöön neliön, joka koostui 9x9 = 81 ruudusta. Neliön sisälle hän piirsi ympyrän (halkaisija 9 ruutua). Neliön sisälle tuli ympyrää ulkoa



sivuava 8-kulmio, jonka pinta-alaksi laskettiin neliön ala vähennettynä neljän kulmakolmion aloilla. Tulokseksi saatiin 81 – 17 = 64 = 8x8 ruutua. Ahmosella oli ilmeisesti tieto tai arvio ympyrän pinta-alan määräytymiskaavasta ($A = \pi r^2$, r on säde) vaikka Eukleides sen teoksessa Alkeet vasta n. 300 eaa. sitovasti osoitti. Näin saatiin π:lle arvo

$$\pi\,(9/2)^2 = 64, \text{ eli } \pi = 256/81 = 3{,}16.$$

Antiikin kreikkalaiset piirsivät ympyrän sisälle säännöllisen kuusikulmion ja ympyrän ulkopuolelle neliön. Jos merkitään ympyrän halkaisijaa 1:llä, niin neliön piiri on 4. Kuusikulmion tahot ovat ympyrän säteen suuruiset, joten sen piirin pituus on 3. Koska ympyrän kehä on pii kertaa ympyrän halkaisija, niin kreikkalaiset päättelivät, että pii on suurempi kuin 3 ja pienempi kuin 4. Tällä menetelmällä tarkkuus paranee, jos käytetään useampitahoisia monikulmioita. Ennen Eukleidesta ja Arkhimedesta ei kuitenkaan osattu laskea useampitahoisten monikulmioiden piirin pituutta, siihen tarvittiin trigonometriset funktiot sini ja kosini. Arkhimedes päätyi n. 200 eaa. 96-tahoisen monikulmion avulla tulokseen, että ympyrän kehän ja halkaisijan suhde on lukujen 3 10/71 (3,1408) ja 3 1/7 (3,1429) välillä. Ptolemaios päätyi laskelmissaan n. 150 jaa. π:n arvoon 3 17/120 (3,1417 kolme desimaalia oikein).

Geometrian avulla π:n arvoa ei voi enää merkittävästi tarkentaa, on siirryttävä laskennallisiin aritmeettisiin menetelmiin. Pii voidaan esittää päätymättömänä suppenevana sarjana (rationaaliarvoisen lukujonon summana), jossa summan arvo tarkentuu sarjan yhteenlaskettavien lisääntyessä. Leibniz esitti n. 1700 ns. Gregory-Leibniz sarjan π:n arvon laskemiseksi:

$$\pi = 4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \ldots).$$

Sarjalla on kuitenkin vain historiallinen pioneeriarvo, sillä se suppenee liian hitaasti, jotta sitä kannattaisi käyttää π:n arvojen laskemiseen. Vasta kun sarjasta otetaan 294 ensimmäistä termiä, saadaan yleisesti käytetty likiarvo 3,14.

Pian Leibnizin jälkeen John Machin kehitti v. 1706 piille nopeasti suppenevan ja käyttökelpoisen sarjakehitelmän:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{5} - \frac{4}{3 \cdot 5^3} + \frac{4}{5 \cdot 5^5} - \frac{4}{7 \cdot 5^7} + \ldots - \frac{1}{239} + \frac{1}{3 \cdot 239^3} - \frac{1}{5 \cdot 239^5} + \frac{1}{7 \cdot 239^7} - \ldots$$

Sivuston ylläpitäjä/moderaattori Aimo Nyberg

LINKIT

- Rojekti X= KOKO LUETTELO
- Rojekti x= (facebook)

Sivun näyttöjä yhteensä

803,656

Tilaa

Tekstit

Kaikki kommentit

Sivuston taustayhteisönä on toiminut 2011 - 2020 VKA ry ICV rf

Klikkaa kuvaa, niin siirryt asukasyhdistyksen sivuille

Sivut

- Etusivu

HAE TÄSTÄ BLOGISTA

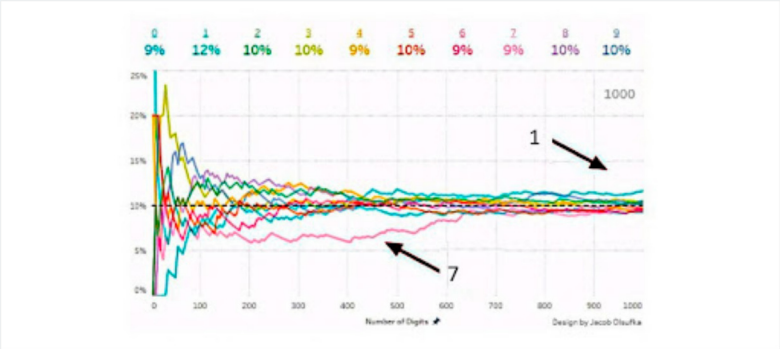
Haku

Machin itse laski tällä kaavalla π:n 100 desimaalin tarkkuudella. Sarjaa on sittemmin käytetty paljon yhä tarkempien likiarvojen laskemiseen.

Machin pääsi laskuissaan π:n sadanteen desimaaliin. Tuhannes desimaali saavutettiin 1949 ja miljoonas 1980-luvulla. Ennen vuosituhannen vaihtumista π:stä tunnettiin jo yli miljardi desimaalia. Tänä vuonna on tavoitettu 300 biljoonan taso (π:n 300:s biljoonas desimaali on 5). Laskenta vaati tietokonejärjestelmältä 7,5 kk:n yhtäjaksoisen laskennan ja tallennuskapasiteettia 2,2 petatavua (petatavu on 1000 teratavua eli 1000 biljoonaa tavua).

π:n ominaisuuksia

Koostuuko π:n desimaalien muodostama lukujono satunnaisluvuista? Kyllä ja ei. Lukujono ei ole aidosti satunnainen, koska se on yksiselitteinen vakio. Jokainen π:n määritelmään perustuva algoritmi tuottaa aina saman lukujoukon. Desimaalien joukolla on kuitenkin satunnaislukujen ominaisuudet, sillä desimaaleissa ei ole toistuvia rakenteita, muita säännönmukaisuuksia tai ennustettavuutta. Jos desimaaleista valitaan yksi satunnaisesti ja edetään siitä haluttu määrä eteenpäin, niin saatu joukko täyttää satunnaisluvuilta vaaditut ominaisuudet.



Yksi satunnaislukujen ominaisuus on, että suuressa lukujoukossa numeroita 0 – 9 on suunnilleen yhtä paljon, 10 %. Kuvassa on graafisesti esitetty eri numeroiden esiintymisten prosenttiosuudet π:n desimaalien lukumäärän kasvaessa välillä 1 – 1000. Prosenttiosuudet lähenevät toisiaan. Pientä ”harhailuakin” esiintyy. Numero 7 on aluksi selvästi aliedustettu, mutta palaa ruotuun. Numerolla 1 on desimaalimäärän 1000 tuntumassa pientä irtiottoa ylöspäin. Kaikki tällaiset anomaliat ovat aidoille satunnaisluvuille tyypillisiä.

Piin merkityksestä matematiikassa saa hyvän käsityksen, kun tarkastelee sitä, miten paljon desimaaleihin liittyvää tutkimusta ja laskentaa jatkuvasti harrastetaan, vaikka riittävä tarkkuus π:n arvolle on saavutettu jo kauan sitten. Kyseessä on sekä tavoitteellista harrastusta ja uteliaisuutta että vakavaa laskentajärjestelmien ja algoritmien kehitystyötä.

Klassinen esimerkki harrastuksesta tulee jo 1800-luvulta. Englantilainen amatöörimatemaatikko William Shanks laski 20 vuoden ajan piin desimaaleja käsin ja sai ratkaistua niitä 707. Vuonna 1945 kuitenkin huomattiin, että laskelman 528. desimaali oli virheellinen ja sen seurauksena kaikki myöhemmät. Shanks itse ei ollut tätä nöyryytystä kokemassa.

Erilaisten erikoisjaksojen etsiminen desimaalijonosta on jatkuvasti suosiossa. Tietyn numeron esiintyminen useamman kerran peräkkäin (”kaksoset”, ”kolmoset” jne.) on yksi runsaasti tutkittu alue. Taulukossa on esitetty π:n 800 ensimmäistä desimaalia ja poimittu siitä esiin tällaiset jaksot. Kaksosia on varsin runsaasti, 63 kpl, lähes yksi 10 desimaalia kohti. Mitään säännöllisyyttä ei ole havaittavissa. Kolmosia on vain kolme, ensimmäisen (111) alkaessa desimaalista 153. Nelosia ja viitosia ei tällä alueella esiinny, mutta sen sijaan yhdeksäisten kuutonen alkaa desimaalista 762.

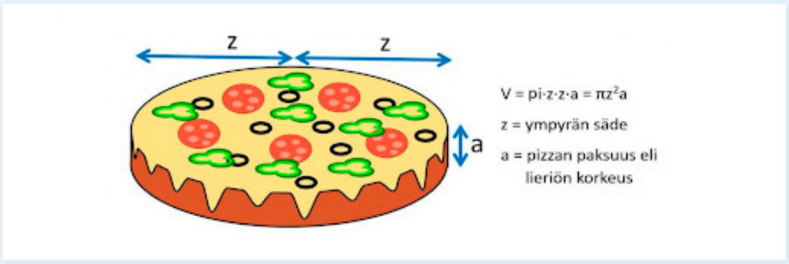
3,1415926535 8979323846 26433832795028841971 69399375105820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872 1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951 0597317321 6096318595

Tätä kuuden yhdeksikön sarjaa kutsutaan Feynmanin pisteeksi Nobel-palkitun fyysikko Richard Feynmanin mukaan. Kehittyneiden laskentajärjestelmien ansiosta nykyisin tunnetaan jo sarjoja, joissa on yli 10 samaa numeroa peräkkäin. Mielenkiintoinen triviatieto on myös, että 17 387 594 880:nnen desimaalin

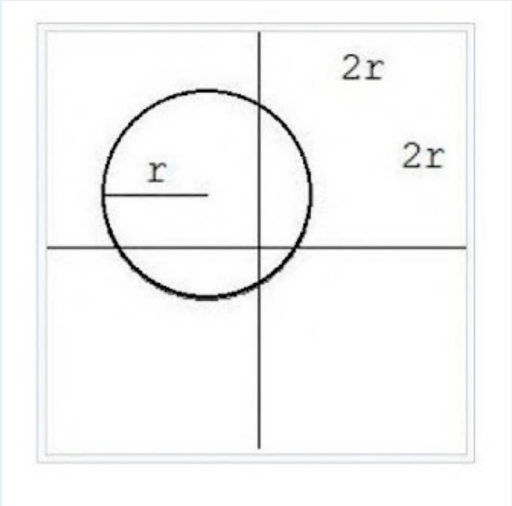
kohdalta alkaa numerosarja 0123456789. Epäilemättä tämä numerosarja esiintyy jossakin myöhemmin numeroiden alenevassa järjestyksessä.

Pii on inspiroinut myös hupijuttuja. Almanakkaan on sovitettu pii-päivää. Se on maaliskuun 14. päivä eli amerikkalaisittain merkittynä 3/14. Sattumalta päivä on myös Albert Einsteinin syntymäpäivä (14.3.1879). Einstein ei tiettävästi osallistunut π:n arvon tai ominaisuuksien tutkisteluun, vaikka vakiolla oli toki merkitystä hänen tutkimuksissaan. Hänelle tärkeä oli toinen ikoninen vakio, valon nopeus c, jolle hänen suhteellisuusteoriansa perustui.

Pizzan ystäville on kehitetty oma π-pizza. Siinä muoto on erityisen tärkeä. Jos pizzan pyöreän pohjan halkaisija on 2z ja paksuus a, on pizzan koko (tilavuus) $V = \pi \cdot z^2 \cdot a$ eli Pi·z·z·a.



Erityisesti fysiikassa suureiden, myös vakioiden, arvoja voidaan mitata kokeellisesti. Seuraavassa esitetään yksinkertainen koejärjestely, eräänlainen peli, π:n karkean likiarvon määrittämiseksi. Otetaan käyttöön neljästä ruutuneliöstä muodostuva ruudukko. Ruutujen sivujen pituudet ovat 2r ja ruudukon sivut siten 4r. Otetaan lisäksi käyttöön kolikko tai muu pyöreä laatta, jonka säde on r. Kun kolikko heitetään satunnaisesti neliöruudukolle, niin todennäköisyys, että kolikko peittää



neliöiden risteyskohdan kuvassa esitetyllä tavalla, on π/4. Toistamalla koe lukuisia kertoja saadaan piille kokeellinen likiarvo. Kokeellisesti saatu todennäköisyys (P) kuvatulle tapahtumalle on niiden heittojen lukumäärän, joissa ruudukon keskipiste peittyy, suhde heittojen kokonaislukumäärään. Tästä saadaan π:lle likiarvo yhtälöistä P = π/4, mistä π = 4·P. Oletetaan esimerkiksi, että kolikkoa on heitetty 1000 kertaa ja 783:ssa tapauksessa keskipiste on peittynyt. Tästä saadaan π:lle likiarvo π = 4·(783/1000) = 3,132. Tulokseen liittyy suuri epävarmuus, toistettaessa koe voidaan saada hyvinkin erilainen tulos. Tulos on kuitenkin sitä luotettavampi, mitä pitempi koesarja on.

Laskuharjoitus (peruskoulun yläasteen matematiikkaa): Osoita, että todennäköisyys keskipisteen peittymiselle kolikkoa heitettäessä on π/4, ts. että kolikon aseman muodostaman alan, jolla piste peittyy, suhde kolikon aseman muodostamaan koko alaan on tuo π/4.

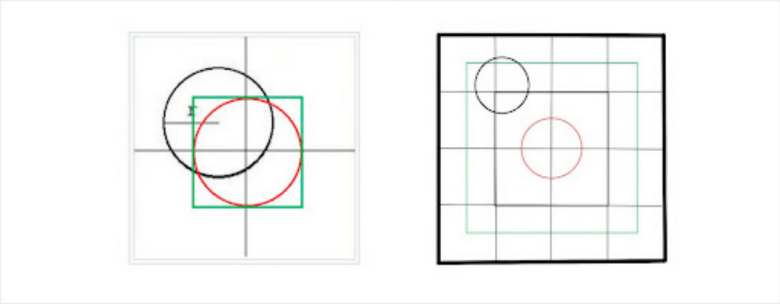
Kymmenille sukupolville kahta viimeistä lukuun ottamatta matematiikka olisi ollut helpompaa, jos π:llä olisi ollut kaupunkilegendassa vaadittu arvo 3. Laskimien ja tietokoneiden puuttuessa numeerisissa trigonometrisissa laskuissa piti turvautua laskutikkuun ja logaritmitauluun. Hankalaa ja monille vaikeaoppista. Nykyisin eroa eri lukumuotojen välillä ei huomaa. Toisaalta π:n irrationaaliluonne on vaatinut matematiikan ammattilaisilta menetelmien kehittämistä, jotta π:lle on saatu

riittävän tarkka arvo. Tämä vaatimus on jo aikoja sitten saavutettu. On esimerkiksi sanottu, että Uranus-planeetan ympärysmitan määrittämiseenkin riitti π:n viisitoista desimaalia. Mutta kiinnostus π:n desimaaleihin jatkuu, jopa kasvaa. Nyt vuorossa ovat jättimäisten tietokoneiden ja tallennusmahdollisuuksien sekä laskenta-algoritmien kehittäminen. Pii elää ajassa ja säilyttää asemansa yhtenä matematiikan ikonina.

Ilkka Virtanen

P.S. Laskuharjoitustehtävän ratkaisu. Kolikon asemaan perustuva todennäköisyys on yksinkertaisinta ratkaista tarkastelemalla kolikon keskipisteen sijaintia. Tätä varten tarvitaan kaksi apupiirrosta. Tehtäväkuvaan (vasemmalla) on vihreällä merkitty neliö, joka rajaa alueen, mihin kolikon keskipiste voi ruudukossa kaiken kaikkiaan sijoittua. Neliön sivujen pituus on 2r ja ala siten 4r2. Punainen ympyrä rajaa kolikon keskipisteelle ympyrän, jonka sisälle sijoittuminen merkitsee ruudukon keskipisteen peittymistä. Ympyrän (säde r) ala on πr2. Keskipisteen peittymistodennäköisyys P saadaan peittymisen määrittävän ympyrän ja koko sijoittumisalueen määrittävän neliön alojen suhteena

P = πr2/(2r)2 = π/4, mistä π:n määrittämiseksi π = 4P.



Koejärjestelyllä ei nykyoloissa ole tietenkään merkitystä piin arvon määrittelyssä. Se onkin lähinnä esimerkki geometrisistä menetelmistä ongelmien ratkaisussa. Antiikin matemaatikkojen tapaan tarvittiin apupiirrokset, joiden avulla ja aiemmin tunnettuja tosiasioita hyödyntäen ratkaisu löydettiin.

Koejärjestelyä voi kuitenkin ajatella sovellettavan pelinä tai tarkkuustehtävänä. Tivolissa voisi olla neliön muotoinen alusta, johon heitetään pyöreää laattaa, jonka halkaisija on puolet alustan sivun pituudesta. Heittäjä saa palkinnon, jos alustan keskipiste jää näkyviin. Tiedämme nyt, että tämän todennäköisyys on 1 - π/4 = (4 – π)/4 π ≈ 0,215. Keskipiste jää siis näkyviin keskimäärin hieman useammin kuin joka viides kerta. Tivolinpitäjän ongelmaksi jää, että palkinto ei voi olla kovin houkutteleva, enintään 4,5-kertainen, jotta palkintojen arvo ei ylittäisi osallistumismaksujen kertymää.

Parempi toteuttamismahdollisuus saadaan, jos muokataan pelin toteutusta. Käytetään 2x2-ruudukon sijasta 4x4-ruudukkoa (oikeanpuoleinen kuva), alustan ruutujen ja laatan koot kuten edellä. Punainen ympyrä rajaa nytkin laatan (musta ympyrä) keskipisteelle ruudukon keskipisteen peittymisalueen ja vihreä neliö koko mahdollisen sijoittumisalueen. Todennäköisyys keskipisteen peittymiselle on

P = πr2/(6r)2 = π/36 ≈ 0,087.

Nyt keskipisteen peittyminen on harvinainen suhteessa näkyviin jäämiseen, esiintyy harvemmin kuin joka 11:s kerta. Palkinnon saa keskipisteen peittyessä ja palkinnon suuruus voi olla vaikka 10-kertainen panokseen verrattuna. Muuttamalla ruudukon tai laatan kokoa voittosuhdetta voi säädellä halutulla tavalla.