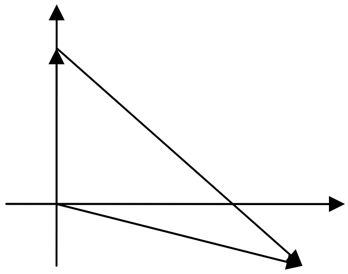
Janne Koljonen
Vaasa yliopisto 27.1.2012
AUTO1030 Signaalien käsittely
Harjoitus 1, tehtävä 4

Complex numbers.

$$z_1 = (0+2\mathrm{i}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2} = 2\angle\pi/2$$
$$z_2 = (3-3\mathrm{i}) = \sqrt{3^2+3^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\arctan(-3/3)} = \sqrt{18}\mathrm{e}^{-i\cdot\pi/4}$$
$$z_1+z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2}+\sqrt{18}\mathrm{e}^{-i\cdot\pi/4}$$

Vektoreista muodostuu kolmio:



Summavektorin pituus saadaan kuvan perusteella kosinilauseella:

$$|z_1+z_2| =$$
$$\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos(\arg z_1+\arg z_2)} =$$
$$\sqrt{2^2+\left(\sqrt{18}\right)^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{18}\cos(\pi/2-\pi/4)} =$$
$$\sqrt{22-4\cdot 3} = \sqrt{10}$$

Summavektorin kulma on kuvan perusteella, käyttäen sinilausetta:

$$\frac{|z_1+z_2|}{\sin(\arg z_1+\arg z_2)} = \frac{|z_2|}{\sin(\pi/2-\arg(z_1+z_2))} \leftrightarrow$$
$$\arg(z_1+z_2) = \frac{\pi}{2}-\left\{\pi - \arcsin\left[\frac{|z_2|}{|z_1+z_2|}\sin(\arg z_1+\arg z_2)\right]\right\} \leftrightarrow$$
$$\arg(z_1+z_2) = \arcsin\left[\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{10}}\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right]-\frac{\pi}{2} \approx -0{,}3218\ (\mathrm{rad})$$

Koska arcsin on jaksollinen funktio, jonka pääjakso on välillä [-pi/2, pi/2], täytyy kulmalaskun toisella rivillä vähentää pi:stä arcsin-pääjakson mukainen kulma, koska kuvan mukaan sitä vastaava kulma > pi/2.

$$z_1 z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2}\sqrt{18}\mathrm{e}^{-i\cdot\pi/4} = 2\sqrt{18}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\pi/2-\pi/4)} = 2\sqrt{18}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/4}$$
$$z_1/z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2}/\sqrt{18}\mathrm{e}^{-i\cdot\pi/4} = \frac{2}{\sqrt{18}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\pi/2+\pi/4)} = \frac{\sqrt{18}}{9}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{3}{4}\pi}$$
$$\mathrm{i}\cdot z_1/z_2 = \frac{z_1}{z_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2} = \frac{\sqrt{18}}{9}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{3}{4}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi/2} = \frac{\sqrt{18}}{9}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{5}{4}\pi} = \frac{\sqrt{18}}{9}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\frac{3}{4}\pi}$$