Janne Koljonen
Vaasa yliopisto 6.2.2012
AUTO1030 Signaalien käsittely
Harjoitus 2, tehtävä 4

Kompleksipolynomit.

Olkoot kompleksiarvoisen polynomin juuret:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 = 1 + 0\mathrm{i} \\ \mathbf{z}_2 = 3 - 3\mathrm{i} \\ \mathbf{z}_3 = 3 + 3\mathrm{i} \end{cases}$$

Kirjoitetaan polynomi $\mathbf{P}(\mathbf{z})$, kun $\mathbf{P}(0) = 1$.

a) Juurikehitelmä

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\mathbf{z}) = K(\mathbf{z}-\mathbf{z}_1)(\mathbf{z}-\mathbf{z}_2)(\mathbf{z}-\mathbf{z}_3) = \\
&K(\mathbf{z}-(1))(\mathbf{z}-(3-3\mathrm{i}))(\mathbf{z}-(3+3\mathrm{i})) = \\
&K(\mathbf{z}-1)\left[\mathbf{z}^2-(3+3\mathrm{i})\mathbf{z}-(3-3\mathrm{i})\mathbf{z}+(3-3\mathrm{i})(3+3\mathrm{i})\right] = \\
&K(\mathbf{z}-1)\left[\mathbf{z}^2-6\mathbf{z}+18\right] = \\
&K(\mathbf{z}^3-6\mathbf{z}^2+18\mathbf{z}-\mathbf{z}^2+6\mathbf{z}-18) = \\
&K(\mathbf{z}^3-7\mathbf{z}^2+24\mathbf{z}-18).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(0) = K(0^3 - 7\cdot 0^2 + 24\cdot 0 - 18) = K(-18) = 1 \leftrightarrow \\
&K = -1/18.
\end{aligned}$$

Eli :

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{18}(\mathbf{z}-(1))(\mathbf{z}-(3-3\mathrm{i}))(\mathbf{z}-(3+3\mathrm{i})).$$

Huomaa, että polynomille tuli reaaliset kertoimet $\mathbf{P}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{18}(\mathbf{z}^3-7\mathbf{z}^2+24\mathbf{z}-18)$ nyt, kun juuret olivat joko reaalisia tai kompleksikonjugaattipareja.

b) Potenssisarjakehitelmä

Saadaan a-kohdan välivaiheesta:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\mathbf{z}) = a_3\mathbf{z}^3 + a_2\mathbf{z}^2 + a_1\mathbf{z} + a_0 = \\
&-\frac{1}{18}(\mathbf{z}^3-7\mathbf{z}^2+24\mathbf{z}-18) = \\
&-\frac{1}{18}\mathbf{z}^3+\frac{7}{18}\mathbf{z}^2-\frac{24}{18}\mathbf{z}+1).
\end{aligned}$$

Janne Koljonen
Vaasa yliopisto 6.2.2012
AUTO1030 Signaalien käsittely
Harjoitus 2, tehtävä 4

c) Hornerin tulomuoto

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}) = a_0 + \mathbf{z}(a_1 + \mathbf{z}(a_2 + \mathbf{z}a_3)) =$$
$$a_0 + \mathbf{z}a_1 + \mathbf{z}^2(a_2 + \mathbf{z}a_3) =$$
$$a_0 + \mathbf{z}a_1 + \mathbf{z}^2 a_2 + \mathbf{z}^3 a_3.$$

Tämä on sama kuin potenssisarjamuoto. Näin ollen:

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}) = 1 + \mathbf{z}\left[-\frac{24}{18} + \mathbf{z}\left(\frac{7}{18} + \mathbf{z}\left(-\frac{1}{18}\right)\right)\right].$$