Janne Koljonen
Vaasa yliopisto
AUTO1030 Signaalien käsittely
Harjoitus 7, tehtävä 2

16.3.2012

Jatkuvan funktion Fourier-muunnos

Tavoitteena on laskea analyyttisesti seuraavan funktion Fourier-muunnos:

$$f(t) = \begin{cases} At, & t \in [0,1] \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases} \tag{1}$$

Fourier-muunnoksen määritelmä on:

$$F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}dt \tag{2}$$,

jossa *j* on imaginaariyksikkö. Lasketaan muunnos määritelmän mukaisesti:

$$F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} At\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}dt \tag{3}$$

Käytetään osittaisintegroinnin kaavaa ($\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$). Valitaan $f'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$ ja $g(x) = At$, jolloin saadaan $f(x) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$ (Tarkista derivoimallakäyttäen yhdistetyn funktion derivointikaavaa!) ja $g'(x) = A$. Koska $f(t)$ on nollasta poikkeava vain välillä [0, 1], saadaan kyseinen väli myös määrätyn integraalin rajoiksi.

Näin ollen kaava (3) voidaan kirjoittaa muotoon (osittaisintegrointikaavalla):

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{t=0}^{1} At\mathrm{e}^{-j\omega t}dt = \Big/_0^1 -\frac{At}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} - \int_{t=0}^{1} -\frac{A}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-j\omega t}dt \\ &= -\frac{A\cdot 1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\cdot 1} - \left(-\frac{A\cdot 0}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\cdot 0}\right) - \int_{t=0}^{1} -\frac{A}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-j\omega t}dt \\ &= -\frac{A}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - \int_{t=0}^{1} -\frac{A}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-j\omega t}dt \end{aligned} \tag{4}$$

Integroidaan jälkimmäinen termi (nyt ω on vakio integrointimuuttujan *t* suhteen). Taas voit tarkistaa derivoimalla:

$$\int_{t=0}^{1} -\frac{A}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}dt \overset{\text{vakio eteen}}{=} -\frac{A}{\mathrm{j}\omega}\int_{t=0}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}dt = -\frac{A}{\mathrm{j}\omega}\Big/_{0}^{1}\left(-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

(5)
$$\overset{\text{yhdistetään vakiot}}{=} -\frac{A}{\mathrm{j}\omega}\left(-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right)\Big/_{0}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

$$= -\frac{A}{\omega^2}\Big/_{0}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} = -\frac{A}{\omega^2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\cdot 1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\cdot 0}\right) = -\frac{A}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\cdot} + \frac{A}{\omega^2}$$

Muista, että $\mathrm{e}^0 = 1$. Sijoitetaan kaavan (5) tulos kaavaan (4):

$$F(\omega) = -\frac{A}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - \left(-\frac{A}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} + \frac{A}{\omega^2}\right)$$

(6)
$$= A\left(-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} + \frac{1}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

Imaginaariyksin eksponenttiesitys $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2)}$. Lisäksi $1/\mathrm{j} = -\mathrm{j}$. Kaavan (6) ensimmäinen termi voidaan siis kirjoittaa uudelleen seuraavasti:

(7)
$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} = \mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} = \mathrm{e}^{\pi/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\pi/2)}.$$

Viimeisessä sievennysvaiheessa hyödynnettiin potenssien laskusääntöjä.

Lopputuloksena tehtävästä saadaan Fourier-muunnos:

(8)
$$F(\omega) = A\left(\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\pi/2)} + \frac{1}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

Pohdintaa:

Mitä Fourier-muunnos kertoo?

Mitä ovat (yleisesti) spektrin amplitudi ja vaihe?

Onko kaavan (8) Fourier-muunnoksella vakiokomponenttia? Mitä vakiokomponentti tarkoittaa?

Mitä tarkoittaa, kun kaavan (8) ensimmäisessä termissä on eksponentissa $-\pi/2$?