Janne Koljonen
Vaasa yliopisto
AUTO1030 Signaalien käsittely
Harjoitus 7, tehtävä 3

22.3.2012

Eulerin kaava

$$\text{Väite}: \sum_{n=0}^{M-1} h(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(M-n)} + \sum_{n=0}^{M-1} h(n)\mathrm{e}^{=\mathrm{j}\omega(M-n)} = 2\sum_{n=0}^{M-1} h(n)\cos\left[\omega(M-n)\right]$$

Todistetaan johtamalla väitteen vasemmasta puolesta oikea puoli käyttäen Eulerin kaavaa.

$$(\text{Eulerin kaava}: \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} = \cos\omega + \mathrm{j}\sin\omega,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} = \cos\omega - \mathrm{j}\sin\omega)$$

Todistus :

$$\sum_{n=0}^{M-1} h(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(M-n)} + \sum_{n=0}^{M-1} h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-n)} \overset{\text{Eulerinkaava}}{=}$$

$$\sum_{n=0}^{M-1} h(n)\left\{\cos\left[\omega(M-n)\right] + \mathrm{j}\sin\left[\omega(M-n)\right]\right\} + \sum_{n=0}^{M-1} h(n)\left\{\cos\left[\omega(M-n)\right] - \mathrm{j}\sin\left[\omega(M-n)\right]\right\} =$$

$$\sum_{n=0}^{M-1} \left\{h(n)\cos\left[\omega(M-n)\right] + h(n)\mathrm{j}\sin\left[\omega(M-n)\right]\right\} + \sum_{n=0}^{M-1} \left\{h(n)\cos\left[\omega(M-n)\right] - h(n)\mathrm{j}\sin\left[\omega(M-n)\right]\right\} =$$

Summaus/integrointi voidaan tehdä erikseen kummallekin termille:

$$\sum_{n=0}^{M-1} \left\{h(n)\cos\left[\omega(M-n)\right]\right\} + \sum_{n=0}^{M-1} \left\{h(n)\mathrm{j}\sin\left[\omega(M-n)\right]\right\} + \sum_{n=0}^{M-1} \left\{h(n)\cos\left[\omega(M-n)\right]\right\} + \sum_{n=0}^{M-1} \left\{-h(n)\mathrm{j}\sin\left[\omega(M-n)\right]\right\} =$$

Siirretään j ja –j vakioina summauksen eteen:

$$\sum_{n=0}^{M-1} \left\{h(n)\cos\left[\omega(M-n)\right]\right\} + \mathrm{j}\sum_{n=0}^{M-1} \left\{h(n)\sin\left[\omega(M-n)\right]\right\} + \sum_{n=0}^{M-1} \left\{h(n)\cos\left[\omega(M-n)\right]\right\} - \mathrm{j}\sum_{n=0}^{M-1} \left\{h(n)\sin\left[\omega(M-n)\right]\right\} =$$

Löydetään kaksi paria samanlaisia summaustermejä. Yhdistetään ne.

Nyt sinitermit kumoavat toisensa ja jäljelle jää vain kaksi kosinitermiä:

$$2\sum_{n=0}^{M-1} h(n)\cos\left[\omega(M-n)\right] \ _{//}$$

ELI: Väitteen vasemmalla puolella summattiin kahta aikasarjaa, jotka olivat toistensa kompleksikonjugaatteja eli niiden reaaliosat olivat yhtäsuuret ja imaginääriosat vastakkaismerkkiset. Väitteen oikea puoli kertoi, että tällaisessa summaamisessa imaginääriosat häviävät ja tulos kaksi kertaa reaaliosa.