Janne Koljonen
Vaasa yliopisto 16.3.2012
AUTO1030 Signaalien käsittely
Harjoitus 7, tehtävä 4

Diskreetin Fourier-muunnoksen laskeminen

Tavoitteena on laskea analyyttisesti seuraavan aikasarjan diskreetti Fourier-muunnos:

$x(n) = \{-1, 0, 0, 1\}$.

Diskreetin Fourier-muunnoksen kaava on:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Omega n} ,$$

jossa $k = \{0, 1, N-1\}$, $\Omega = 2\pi/N$ ja N on aikasarjan pituus.

Eli kun:
$k = 0$ → tasakomponentti (DC-komponentti)
$k = N$ → näytteenottotaajuus
$k = N/2$ → Nyquistin taajuus
$k = 1$ → näytteenottotaajuus/N (alin taajuus)
$k = 1$ → ($2 \times$ näytteenottotaajuus)/N
jne.

Nyt $N = 4$, ja vastaava diskreetti Fourier-muunnos on:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\pi}{2}n} = \sum_{n=0}^{3} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\pi}{2}n}$$

Lasketaan $X(k)$, kun $k = \{0, 1, 2, 3\}$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0\frac{\pi}{2}n} = \sum_{n=0}^{3} x(n) \cdot 1 =$$
$$-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{3} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}1\frac{\pi}{2}n} = \sum_{n=0}^{3} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}n} =$$
$$-1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}0} + 0 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}1} + 0 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}2} + 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}3} =$$
$$-1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}} = -1 + \mathrm{j}$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\frac{\pi}{2}n} = \sum_{n=0}^{3} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n} =$$

$$-1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi 0} + 0\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi 1} + 0\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi 2} + 1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi 3} =$$

$$-1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi} = -1 - 1 = -2$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\frac{\pi}{2}n} = \sum_{n=0}^{3} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}n} =$$

$$-1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}0} + 0\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}1} + 0\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}2} + 1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}3} =$$

$$-1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{9}{2}\pi} = -1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = -1 - \mathrm{j}$$

Kerätään tulokset…

Karteesisessa muodossa:

$X(k) = \{0, -1 + \mathrm{j}, -2, -1 - \mathrm{j}\}$

ja kulmamuodossa:

$$X(k) = \left\{0 \quad \sqrt{1^2+1^2}\,\mathrm{e}^{\arctan(1/-1)} \quad -2 \quad \sqrt{1^2+1^2}\,\mathrm{e}^{\arctan(-1/-1)}\right\} =$$

$$\left\{0 \quad \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}} \quad -2 \quad \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}}\right\}$$

Huomaa, että kompleksiset Fourier-termit esiintyvät kompleksikonjugaattipareina aliastaajuuksilla, mikäli aikasarja on reaalinen. Nyt siis taajuudet $k = 1$ ja $k = 3$ ovat toistensa aliastaajuuksia, koska peilikuvia Nyqyistin taajuuden $k = 2$ suhteen.