Janne Koljonen
Vaasa yliopisto 22.3.2012
AUTO1030 Signaalien käsittely
Harjoitus 7, tehtävä 5

Käänteisen diskreetin Fourier-muunnoksen laskeminen

Tavoitteena on laskea analyyttisesti seuraavan Fourier-muunnoksen käänteismuunnos eli aikasarja, jonka DFT on:

$X(k) = \{1, \mathrm{i}, \mathrm{i}, 1\}$.

Käänteisen diskreetin Fourier-muunnoksen kaava on:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Omega n},$$

jossa $n = \{0, 1, N–1\}$, $\Omega = 2\pi/N$ ja N on Fourier-muunnossarjan pituus.

Nyt $N = 4$, ja vastaava diskreetti käänteis-Fourier-muunnos on:

$$x(n) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}n}$$

Lasketaan x(n), kun $n = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$x(0) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}0} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)\cdot 1 =$$

$$\frac{1}{4}\left(1\cdot 1 + \mathrm{i}\cdot 1 + \mathrm{i}\cdot 1 + 1\cdot 1\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(2 + 2\mathrm{i}\right) = 0{,}5 + 0{,}5\mathrm{i}$$

(lasketaan seuraavassa käyttäen kulmamuotoa)

$$x(1) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}1} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{1}{4}\left(1\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\frac{\pi}{2}} + \mathrm{i}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}1\frac{\pi}{2}} + \mathrm{i}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{\pi}{2}} + 1\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} - \mathrm{i}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} - \mathrm{i}\right) =$$

$$\frac{1}{4}(1 - 1 - \mathrm{i} - \mathrm{i}) =$$

$$\frac{1}{4}(-2\mathrm{i}) = -0{,}5\mathrm{i}$$

(lasketaan seuraavaksi käyttäen karteesista muotoa)

$$x(2) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} =$$

$$\frac{1}{4}\left(1\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\pi} + \mathrm{i}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}1\pi} + \mathrm{i}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} + 1\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(1\cdot 1 + \mathrm{i}\cdot(-1) + \mathrm{i}\cdot 1 + 1\cdot(-1)\right) =$$

$$\frac{1}{4}(1 - \mathrm{i} + \mathrm{i} - 1) = 0$$

$$x(3) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{2}3} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{3\pi}{2}} =$$

$$\frac{1}{4}\left(1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 0} + \mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}1\frac{3\pi}{2}} + \mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{3\pi}{2}} + 1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{3\pi}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(1\cdot 1 + \mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i}) + \mathrm{i}\cdot(-1) + 1\cdot\mathrm{i}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(1 + 1 - \mathrm{i} + \mathrm{i}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(2\right) = 0{,}5$$

Kerätään tulokset…

x(n) = {0,5 + 0,5i; –0,5i; 0; 0,5}

Huomaa, että aikasarja on kompleksinen, koska Fourier-muunnoksessa aliastaajuudet eivät olleet kompleksikonjugaatteja.

Tarkistetaan Matlabilla käyttäen `ifft`-komentoa:

```
>> X=[1 i i 1]

X =

  Columns 1 through 3

   1.0000                  0 + 1.0000i        0 + 1.0000i

  Column 4

   1.0000

>> ifft(X)

ans =

  Columns 1 through 3

   0.5000 + 0.5000i        0 - 0.5000i        0

  Column 4

   0.5000
```