3.7. Stokesin lause

Stokesin lause yleistää Greenin lauseen tasoalueelta 2-ulott. pinnalle $S \subset \mathbb{R}^3$. Pintaintegraali yli pinnan S liitetään tällöin pinnan S reunaa ∂S pitkin otettuun käyräintegraaliin.

Greenin kaava (Lause 3.8) voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa

$$\iint_R (\nabla \times \overline{u}) \cdot \overline{k} \, dx dy = \int_{\partial R} \overline{u} \cdot dr ,$$

sillä $(\nabla \times \overline{u}) \cdot \overline{k} = D_x u_2 - D_y u_1$. Tässä muodossa kaava yleistyy tasoalueelta R pinnalle S. Huomaa, että $\overline{k} \perp xy$-tasoa vastaan.

<u>Lause 3.10.</u> (Stokesin lause) Olkoon S suljettu säännöllinen pinta-alue ja ∂S positiivisesti suunnistettu sekä $\overline{n}$ pinnan S yksikkönormaali. Tällöin jatkuvasti derivoituvalle $\overline{u} : S \to \mathbb{R}^3$ pätee

$$\iint_S (\nabla \times \overline{u}) \cdot \overline{n} \, dA = \int_{\partial S} \overline{u} \cdot dr .$$

<u>Tod.</u> Palautetaan Greenin lauseeseen parametriesityksen $\overline{r} : R \to S$ välityksellä. Yksityiskohdat sivuutetaan.

<u>Esim.</u> Olkoon $\overline{u}(x,y,z) = (2y, -2x, z^2 x)$. Lasketaan $\iint_S (\nabla \times \overline{u}) \cdot \overline{n} \, dA$ kun pintana on $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, \ z \geq 0\}$.

Nyt $\partial S = \{(x,y,0) : x^2+y^2 = 1\}$. Stokesin kaava ~~&~~ napakoordinaatit:

$$\int_{\partial S} \overline{u} \cdot dr = \int_0^{2\pi} \overline{u}(\overline{r}(\varphi)) \cdot \overline{r}'(\varphi) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} (2\sin\varphi, -2\cos\varphi, 0) \cdot (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} -2 \, d\varphi = \underline{\underline{-4\pi}} .$$

Huom! (vrt. s. 50). Jos rot $\bar{u} = \nabla \times \bar{u} = 0$, Stokesin

lause antaa: $\int_{\partial S} \bar{u} \cdot dr = \iint_S (\nabla \times \bar{u}) \cdot \bar{n}\, dA = 0$.

Tässä ∂S voi olla mielivaltainen pinta-alueen $S \subset \mathbb{R}^3$ suljettu paloittain

säännöllinen kaari, joten $\nabla \times \bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{u}$:lla on potentiaali.

Siis: Jatkuvasti derivoituva vektorikenttä $\bar{u}$ on pyörteetön

$\Leftrightarrow$ $\bar{u}$:lla on potentiaali.

3.8. Gaussin divergenssilause

Divergenssilause (Lause 3.9) voidaan yleistää 3-komponenttiselle vektorifunktiolle $\bar{u}: V \to \mathbb{R}^3$, missä $V \subset \mathbb{R}^3$ on säännöllinen kappale $\mathbb{R}^3$:ssa. Tällöin V:n yli otettu avaruusintegraali liitetään V:tä rajoittavan reunapinnan ∂V yli otettuun pintaintegraaliin.

Olkoon $V \subset \mathbb{R}^3$ umpinaisen säännöllisen pinnan $S = \partial V$ rajaama kappale (pinnan S parametriesitys $\bar{r}: R \to \mathbb{R}^3$ on paloittain kahdesti jatkuvasti derivoituva) ja olkoon $\bar{n}$ V:n reunapinnan ulospäin osoittava yksikkönormaali.

Lause 3.11. (Divergenssilause) Olkoot $V \subset \mathbb{R}^3$, ∂V ja $\bar{n}$ kuten yllä sekä $\bar{u}: V \to \mathbb{R}^3$ jatkuvasti derivoituva. Tällöin

$$\iiint_V \nabla \cdot \bar{u}\, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial V} \bar{u} \cdot \bar{n}\, dA.$$

Tod. Sivuutetaan.

Esim. Lasketaan vektorikentän $\bar{u} = 4xz\bar{i} - y^2\bar{j} + yz\bar{k}$ vuo kuution $V = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$ pinnan läpi.

$$\iint_{\partial V} \bar{u}\cdot\bar{n}\, dA \overset{\text{(Lause 3.11)}}{=} \iiint_V \nabla\cdot\bar{u}\, dxdydz = \iiint_V (D_x u_1 + D_y u_2 + D_z u_3)\, dxdydz$$

$$= \iiint_V (4z - 2y + y)\, dxdydz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (4z - y)\, dxdydz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (4z - y)\, dydz = \int_0^1 \left(4z - \tfrac{1}{2}\right) dz = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}}}.$$

Vektorikenttää $\bar{F}$ sanotaan vektorifunktion $\bar{u}$ <u>vektoripotentiaaliksi</u>, jos $\bar{u} = \nabla\times\bar{F}$ $(= \text{rot}\,\bar{F})$. Jos $\bar{u}$:lla on vektoripotentiaali, niin Lauseen 3.5 kohdan (iii) mukaan $\text{div}(\bar{u}) = \nabla\cdot\bar{u} = \nabla\cdot(\nabla\times\bar{F}) = 0$.

Vektorikenttää $\bar{u}$ sanotaan <u>lähteettömäksi</u>, jos $\nabla\cdot\bar{u} = 0$.

Vektorikentän lähteettömyys on siten välttämätön ehto vektoripotentiaalin olemassaololle. Myös käänteinen pätee: jos $\bar{u}$ on lähteetön, niin sillä on vektoripotentiaali.

<u>Siis</u>: Jatkuvasti derivoituva vektorikenttä $\bar{u}$ on lähteetön

$$\Leftrightarrow \exists \bar{F} : \bar{u} = \nabla\times\bar{F}.$$

Asiaa voi perustella/havainnollistaa Gaussin divergenssilauseen avulla: Kun $\nabla\cdot\bar{u} = 0$, niin $\bar{u}$:n <u>vuo läpi mielivaltaisen umpinaisen pinnan $\tilde{S} \subset V$ on nolla</u>: $\iint_{\tilde{S}} \bar{u}\cdot\bar{n}\, dA = \iiint_{V(\tilde{S})} \nabla\cdot\bar{u}\, dxdydz = 0$, ts. "<u>kokonaisvirtaus</u> $\tilde{S}$:n läpi $= 0$" $\Leftrightarrow$ Vissä ei lähteitä/nieluja.