Matemaattiset menetelmät II

5. helmikuuta 2014

Esipuhe

Tämä on 1. versio Matemaattiset menetelmät II-kurssin opetusmonisteesta, joka perustuu Vaasan yliopistossa luennoimaani vastaavan nimiseen kurssiin. Sisältö noudattaa pitkälti aiempien luentomuistiinpanojeni mukaista esitystä.

Esitän kiitokseni *H.L. Wietsma:lle* sekä *Marko Moisiolle* (Vaasan yliopisto, matemaattisten tieteiden laitos), joista ensinmainittu on suorittanut tekstin puhtaaksikirjoituksen LaTeX-muotoon ja piirtänyt monisteessa esiintyvät kuvat ja jälkimmäinen puolestaan esittänyt parannusehdotuksia ja täydennyksiä monisteessa olevaan materiaaliin.

Vaasassa 15 tammikuuta 2014

Seppo Hassi

Sisältö

Luku 1: Usean muuttujan funktiot

1.1 Vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$

Tarkastellaan *n-ulotteiseen vekoriavaruuteen* $\mathbb{R}^n$ liittyviä peruskäsitteitä. Joukko $\mathbb{R}^n$ on *karteesinen tulo* $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ kpl}}$ ja sen alkioina ovat järjestetyt n-alkioiset reaalilukujonot $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, joita kutsutaan vektoreiksi (lyhyesti myös $\mathbb{R}^n$:n pisteiksi). Vektorit $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ ovat samoja jos niiden kaikki komponentit ovat samoja:

$$\overline{x} = \overline{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \ldots,\ x_n = y_n.$$

Vektoreiden yhteen- ja skalaarikertolasku määritellään kaavoilla

$$\begin{aligned} \overline{x} + \overline{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n); \\ a\overline{x} &= (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n). \end{aligned}$$

Yhteenlasku noudattaa seuraavia sääntöjä:

(1) vaihdannaisuus: $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$;

(2) liitännäisyys: $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$;

(3) on olemassa *nollavektori* $\overline{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$; ts.

$$\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}, \quad \forall \overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;$$

(4) jokaisella vektorilla $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on olemassa *vastavektori* $\overline{y} = -\overline{x} = (-x_1, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$, jolle pätee

$$\overline{x} + \overline{y} = 0.$$

Tällä yhteenlaskulla verustettuna $\mathbb{R}^n$ muodostaa ns. *Abelin ryhmän* eli *kommutatiivisen ryhmän.*

Skalaarilla kertominen noudattaa seuraavia sääntöjä:

(5) skalaarikertolaskun liitännäisyys: $a(b\overline{x}) = (ab)\overline{x}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n$;

(6) skalaarikertolaskun osittelulaki: $a(\overline{x} + \overline{y}) = a\overline{x} + a\overline{y}$;

(7) skalaarikertolaskun osittelulaki: $(a + b)\overline{x} = a\overline{x} + b\overline{x}$;

(8) lisäksi *luku* 1 on *skalaarikertolaskun neutraalialkio*:

$$1\overline{x} = \overline{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Näillä yhteen- ja skalaarikertolaskulla varustettuna $\mathbb{R}^n$ muodostaa *reaalikertoimisen vektoriavaruuden*. Ne määräävät $\mathbb{R}^n$:n algebralliset ominaisuudet. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ geometriset ominaisuudet määräytyvät vektoreiden $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ *sisätulosta* (eli *skalaaritulosta* tai *pistetulosta*):

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \quad (\in \mathbb{R}).$$

Sisätulo liittää kahteen vektoriin yhden reaaliluvun eli sitä voi pitää kuvauksena $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sisätulolla on seuraavat ominaisuudet: $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$ ja $\forall a \in \mathbb{R}$ pätee:

(1) vaihdantalaki: $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$;

(2) osittelulaki: $(\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{z} = \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot \overline{z}$;

(3) skalaarin siirtosääntö: $(a\overline{x}) \cdot \overline{y} = a(\overline{x} \cdot \overline{y})$.

Sisätulon avulla voidaan määritellä $\mathbb{R}^n$:n *vektorin $\overline{x}$ normi*, merk. $||\overline{x}||$, ei-negatiivisena reaalilukuna kaavalla

$$||\overline{x}|| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Normin avulla voidaan puolestaan määritellä $\mathbb{R}^n$:n vektoreiden eli pisteiden $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ *välinen etäisyys* lausekkeena $||\overline{x} - \overline{y}||$. Etäisyyskäsite määrää $\mathbb{R}^n$:n ns. *topologiset ominaisuudet*, joihin mm. raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmät voidaan perustaa. Tarkastellaan lyhyesti $\mathbb{R}^n$:n sisätulon määräämiä geometrisia ominaisuuksia. Vektoreiden $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x} \neq \overline{0}$ ja $\overline{y} \neq \overline{0}$, välinen kulma määritellään kaavalla

$$\cos \sphericalangle(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{||\overline{x}|| \, ||\overline{y}||},$$

missä kulma rajoitetaan välille $[0, \pi]$: $0 \leq \sphericalangle(\overline{x}, \overline{y}) \leq \pi$. Jos $\sphericalangle(\overline{x}, \overline{y}) = \pi/2$, vektoreiden $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ sanotaan olevan *kohtisuorassa* toisiaan vastaan eli $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ ovat *orthogonaaliset*, merk. $\overline{x} \perp \overline{y}$. Määritelmän mukaan

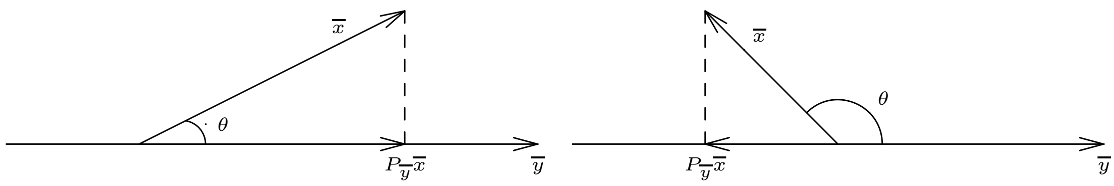
$$\overline{x} \perp \overline{y} \iff \overline{x} \cdot \overline{y} = 0, \quad (\overline{x} \neq 0 \neq \overline{y}). \tag{1.1}$$

Nollavektorilla $\overline{0} \in \mathbb{R}^n$ ei ole määrättyä suuntaa, mutta sovimme, että $\overline{0} \perp \overline{x}$, $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin siis (1.1) pätee kaikille $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$.

Huom.: Jos $\overline{x} \cdot \overline{y} \geq 0$, niin $0 \leq \sphericalangle(\overline{x}, \overline{y}) \leq \pi/2$ ja jos $\overline{x} \cdot \overline{y} \leq 0$, niin $\pi/2 \leq \sphericalangle(\overline{x}, \overline{y}) \leq \pi$. Erityisesti vektorit $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ ovat *samansuuntaiset* jos $\Theta = \sphericalangle(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ eli $\cos \Theta = 1$, kun taas $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ ovat *vastakkaissuuntaiset* jos $\Theta = \sphericalangle(\overline{x}, \overline{y}) = \pi$ eli jos $\cos \Theta = -1$.

Vektorin $\overline{x}$ *kohtisuora eli ortogonaalinen projektio* vektorille $\overline{y}$ ($\neq \overline{0}$), merk. $P_{\overline{y}}\overline{x}$, määritellään kaavalla

$$P_{\overline{y}}\overline{x} = \frac{\cos \Theta \, ||\overline{x}||}{||\overline{y}||} \overline{y}, \quad \Theta = \sphericalangle(\overline{x}, \overline{y}).$$

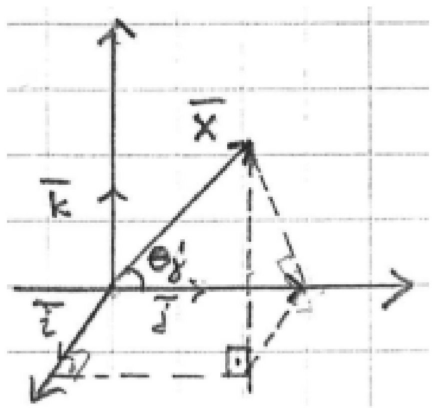


(a) Kohtisuora projekti $0 \leq \Theta \leq \pi/2$ (b) Kohtisuora projekti $\pi/2 < \Theta \leq \pi$

Kun $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ ovat *yksikkövektoreita* eli $||\overline{x}|| = 1 = ||\overline{y}||$, saadaan

$$P_{\overline{y}}\overline{x} = \cos\Theta \cdot \overline{y} = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{||\overline{x}||||\overline{y}||}\overline{y} = (\overline{x} \cdot \overline{y})\overline{y},$$

jolloin siis $\overline{x} \cdot \overline{y} = \cos\Theta$, $\Theta = \sphericalangle(\overline{x}, \overline{y})$



Kuva 1.1: Vektoriavaruus $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^3$:n vektoreita havainnollistetaan usein 3-ulotteisessa koordinaatistossa, missä *kantavektoreina* ovat $\overline{i} = (1, 0, 0)$, $\overline{j} = (0, 1, 0)$ ja $\overline{k} = (0, 0, 1)$, katso Kuva 1.1. Tällöin $\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\overline{k}$ ja esim. $P_{\overline{j}}\overline{x} = \cos\Theta_j ||x||\overline{j} = (\overline{x} \cdot \overline{j})\overline{j}$. Lukuja x_1, x_2 ja x_3 sanotaan $\overline{x}$:n *koordinaateiksi* kannan $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ suhteen.

Koska $|\cos\Theta| \leq 1$, saadaan sisätulolle epäyhtälö

$$1 \geq |\cos\Theta| = \frac{|\overline{x} \cdot \overline{y}|}{||\overline{x}||||\overline{y}||} \quad \Longleftrightarrow \quad |\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq ||\overline{x}||||\overline{y}||, \tag{1.2}$$

jota kutsutaan *Cauchy-Schwarzin epäyhtälöksi*. Sisätulon määräämään normiin $||\overline{x}|| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}}$ liittyy seuraavat tyypilliset ominaisuudet:

(1) $||\overline{x}|| \geq 0 \ \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $||\overline{x}|| = 0 \Longleftrightarrow \overline{x} = 0$;

(2) $||a\overline{x}|| = |a|||\overline{x}|| \ \forall a \in \mathbb{R}$ ja $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n$;

(3) $||\overline{x} + \overline{y}|| \leq ||\overline{x}|| + ||\overline{y}||$ (Kolmioepäyhtälö).

Ominaisuudet (1) ja (2) ovat ilmeisiä. Perustellaan vielä kohdan (3) kolmioepäyhtälö:

$$\begin{aligned}||\overline{x}+\overline{y}||^2 &= (\overline{x}+\overline{y})\cdot(\overline{x}+\overline{y}) = \overline{x}\cdot\overline{x}+\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{y}\cdot\overline{x}+\overline{y}\cdot\overline{y}\\ &= ||\overline{x}||^2+2\overline{x}\cdot\overline{y}+||\overline{y}||^2 \underbrace{\leq}_{\text{Cauchy-Schwartz}} ||\overline{x}||^2+2||\overline{x}||||\overline{y}||+||\overline{y}||^2 = (||\overline{x}||+||\overline{y}||)^2.\end{aligned}$$

Normin avulla voimme määritellä vektorin (pisteen) $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *ϵ-säteisen (avoimen) palloympäristön* eli *ϵ-ympäristön* $\mathbb{R}^n$:ssä:

$$B_\epsilon(\overline{x_0}) = \{\overline{x}\in\mathbb{R}^n : ||\overline{x}-\overline{x}_0|| < \epsilon\} \quad (\epsilon > 0).$$

Kun $n = 1, 2, 3$ on ϵ-ympäristö $B_\epsilon(\overline{x}_0)$ jana ($n = 1$), ympyrä ($n = 2$) ja pallo ($n = 3$) säteenä luku $\epsilon > 0$.

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jokin $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Pistettä $\overline{x}_0 \in A$ sanotaan A:n *sisäpisteeksi* jos on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että $\overline{x}_0$:n ϵ-ympäristö $B_\epsilon(\overline{x}_0) \subset A$, ts. $\exists\epsilon < 0$ s.e. $||\overline{x}-\overline{x}_0|| < \epsilon \;\Rightarrow \overline{x}\in A$. Joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan *avoimeksi joukoksi*, jos sen jokainen piste on sen sisäpiste. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *suljettu joukko*, jos sen komplementti $\mathbb{R}^n \setminus A$ on avoin joukko. Esim. yhdestä pisteestä muodostuva joukko $\{\overline{x}_0\}$ on suljettu. Joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan *rajoitetuksi*, jos se sisältyy johonkin origokeskiseen palloon: $A \subset B_r(\overline{0})$, jollakin $r > 0$.

Pistettä $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sanotaan *joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ kasaantumispisteeksi*, jos sen jokainen *aito ϵ-ympäristö*

$$B'_\epsilon(\overline{x}_0) = B_\epsilon(\overline{x}_0)\setminus\{\overline{x}_0\} = \{\overline{x}\in\mathbb{R}^n : 0 < ||\overline{x}-\overline{x}_0|| < \epsilon\}$$

sisältää joukon A pisteitä; ts. $\forall\epsilon > 0 : B'_\epsilon(\overline{x}_0)\cap A \neq \emptyset$. Piste $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sanotaan *joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ reunapisteeksi*, jos sen jokainen ϵ-ympäristö $B_\epsilon(\overline{x}_0)$ sisältää sekä joukon A että sen komplementtijoukon $\mathbb{R}^n \setminus A$ pisteitä; ts. $\forall\epsilon > 0 : B_\epsilon(\overline{x}_0)\cap A \neq \emptyset$ ja $B_\epsilon(\overline{x}_0)\cap(\mathbb{R}^n\setminus A) \neq \emptyset$. Siten joukoilla A ja $\mathbb{R}^n\setminus A$ on samat *reunapisteet l. reuna*. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ reunaa merkitään ∂A. Siis $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n\setminus A)$.

Esimerkki 1.1.1. Olkoon $A = B_1(\overline{0}) = \{\overline{x}\in\mathbb{R}^n : ||\overline{x}|| < 1\}$. Tällöin A on avoin joukko, sillä jos $\overline{x}_0 \in A$ on mielivaltainen, niin $B_{(1-||\overline{x}_0||)}(\overline{x}_0) \subset A$. A:n komplementti $\mathbb{R}^n\setminus A = \{\overline{x}\in\mathbb{R}^n : ||\overline{x}|| \geq 1\}$ on suljettu. Joukon A kasaantumispisteiden joukko on

$$\{\overline{x}\in\mathbb{R}^n : ||\overline{x}|| \leq 1\}.$$

Tämä joukko on suljettu, sillä sen komplementti

$$\mathbb{R}^n\setminus\{\overline{x}\in\mathbb{R}^n : ||\overline{x}|| \leq 1\} = \{\overline{x}\in\mathbb{R}^n : ||\overline{x}|| > 1\}$$

on avoin joukko. Joukon A reuna on

$$\partial A = \{\overline{x}\in\mathbb{R}^n : ||\overline{x}|| = 1\}.$$

1.2 Usean muuttujan reaalifunktiot

Kuvausta $f : A \to \mathbb{R}$, missä $A \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan n:n reaalisen muuttujan reaalifunktioksi. Kuten yhden reaalisen muuttujan tapauksessa käytetään seuraavia eri esitymuotoja:

(1) Eksplisiittinen esitys: $y = f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

(2) Implisiittinen esitys: $F(\overline{x}, y) = 0$, $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;

(3) Parametri esitys:

$$\begin{cases} x_1 = u_1(t_1, t_2, \dots, t_n); \\ \vdots \\ x_n = u_n(t_1, t_2, \dots, t_n); \\ y = v(t_1, t_2, \dots, t_n). \end{cases}$$

Funktion määrittelyjoukoksi M_f valitaan laajin mahdollinen $\mathbb{R}^n$:n osajoukko, jos sitä ei ole muuten määrätty.

Esimerkki 1.2.1. Funktion $f(x, y) = \sqrt{x-y}$ määritellyjoukko on $M_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$.

Esimerkki 1.2.2. Yhtälö $F(x, y, z; r) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ kiinteällä r:n arvolla antaa implisiittisen esityksen origo-keskiselle r-säteiselle pallolle. Siitä saadaan funktiot

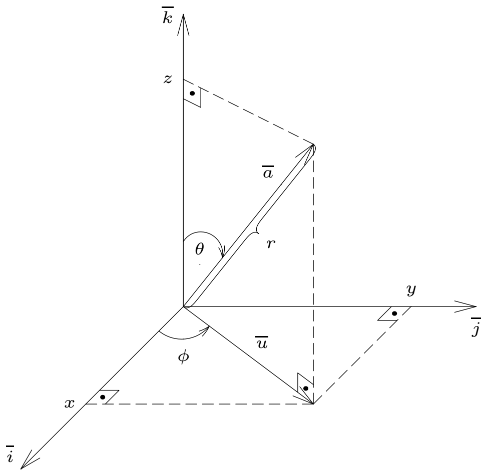
$$z = f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \quad z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad (x^2 + y^2 \leq r^2)$$

eksplisiittisinä esityksinä (ylempi ja alempi puolipallo).

Pallokoordinaatisto:
Reaalilukutason $\mathbb{R}^2$ ja kompleksitason $\mathbb{C}$ vektorien napakoordinaattiesitystä vastaava esitys vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^3$ on *pallokoordinaatistoesitys*, joka voidaan määritellä seuraavilla yhtälöillä:

$$\begin{cases} x = r \sin\Theta \cos\phi \\ y = r \sin\Theta \sin\phi \quad (0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi). \\ z = r \cos\Theta \end{cases} \tag{1.3}$$

Arvot $0 \leq \theta \leq \pi/2$ vastaavat ylempää puolipalloa ja arvot $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ vastaavat alempaa puolipalloa; katso Kuva 1.2.



Kuva 1.2: Vektorin $\overline{a} = (x, y, z)$:n pallokoordinaatit. Kuvassa $\overline{u}$ on $\overline{a}$:n ortogonaalinen projektio xy-tasoon.

Raja-arvon määritelmä: Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ n muuttujan funktio ($A \subset \mathbb{R}^n$). Oletetaan, että f on määritelty jossakin pisteen $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ aidossa palloympäristössä $B'(\overline{x}_0)$. Tällöin funktiolla f on *raja-arvo a pisteessä* $\overline{x}_0$, merk. $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = a$, jos $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta(=\delta_\epsilon) > 0$ s.e.

$$0 < ||\overline{x} - \overline{x}_0|| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(\overline{x}) - a| < \epsilon.$$

Funktion raja-arvo voidaan määritellä myös pisteissä $\overline{x}_0$, jotka ovat f:n määrittelyjoukon M_f kasautumispisteitä: Olkoon $\overline{x_0}$ M_f:n kasautumispiste. Tällöin $\lim_{\overline{x}\in M_f\to\overline{x_0}} f(\overline{x}) = a$ jos $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_\epsilon > 0$ s.e.

$$0 < ||\overline{x} - \overline{x_0}|| < \delta \text{ ja } \overline{x} \in M_f \quad \Longrightarrow \quad |f(\overline{x}) - a| < \epsilon.$$

Lause 1.2.3. Jos funktiolla f on raja-arvo pisteessä $\overline{x}_0$, niin se on yksikäsitteisesti määrätty; ts. jos $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = a$ ja $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = b$, niin $a = b$.

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Oletuksen nojalla

$$|f(\overline{x}) - a| < \epsilon \quad \text{ja} \quad |f(\overline{x}) - b| < \epsilon,$$

kun $0 < ||\overline{x} - \overline{x}_0|| < \delta(= \min\{\delta(a), \delta(b)\})$. Tällöin

$$|a - b| = |(f(\overline{x}) - b) - (f(\overline{x}) - a)| \underbrace{\leq}_{\text{Kolmioepäyhtälö}} |f(\overline{x}) - b| + |f(\overline{x}) - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, on oltava $|a - b| = 0$ eli $a = b$. □

Raja-arvon olemassaoloa voidaan tutkia myös seuraavan lauseen avulla.

Lause 1.2.4. Olkoon $\overline{x_0}$ funktion f määrittelyjoukon $A\,(\subset \mathbb{R}^n)$ kasautumispiste. Funktiolla f on raja-arvo a pisteessä $\overline{x_0}$ jos ja vain jos jokaiselle jonolle $(\overline{x_n})_{n=1}^{\infty}$ joukon A pisteitä pätee:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x_n} = \overline{x_0} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(\overline{x_n}) = f(\overline{x_0}).$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraavat esimerkit havainnollistavat raja-arvon määräämistä ja sen olemassaolon selvittämistä $\mathbb{R}^n$:ssä.

Esimerkki 1.2.5. Osoitetaan, että $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(3x + y) = 5$ yo. määritelmään perustuen. Merkitään $f(x, y) = 3x + y$. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - 5| &= |3x + y - 5| = |3(x-1) + (y-2)| \underbrace{\leq}_{\text{Kolmioepäyhtälö}} 3|x-1| + |y-2| \\
&= 3\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(y-2)^2} \leq 3\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \\
&= 4\underbrace{||(x,y) - (1,2)||}_{=\delta}.
\end{aligned}$$

Valitaan $\delta = \epsilon/4$: Tällöin $||(x, y) - (1, 2)|| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x, y) - 5| < 4\delta = \epsilon$.

Esimerkki 1.2.6. Tutkitaan onko funktiolla $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ raja-arvoa pisteessä $(0,0)$ eli origossa.

Jos origoa lähestytään pitkin suoraa $y = 0$, saadaan

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Toisaalta, jos origoa lähestytään pitkin suoraa $y = x$, saadaan

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{xx}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Nähdään, että f:n raja-arvo origossa riippuu lähestymissuunnasta. Tästä johtuen *f:llä ei ole raja-arvoa origossa.*

Lause 1.2.7. Olkoot $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = a$ ja $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} g(\overline{x}) = b$. Tällöin:

(i) $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0}(cf(\overline{x}) + dg(\bar{(}x))) = ca + db$, $c, d \in \mathbb{R}$;

(ii) $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x})g(\overline{x}) = ab$;

(iii) $\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \frac{a}{b}$ jos $b \neq 0$.

Todistus. Kuten yhden muuttujan reaalifunktioille. □

Jatkuvuus: Funktion jatkuvuus määritellään raja-arvon avulla: f on *jatkuva pisteessä* $\overline{x}_0 \in M_f \subseteq \mathbb{R}^n$ jos

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0)$$

eli jos $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_\epsilon > 0$ s.e.

$$||\overline{x} - \overline{x_0}|| < \delta \text{ ja } \overline{x} \in M_f \quad \Longrightarrow \quad |f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)| < \epsilon$$

tai yhtäpitävästi: $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_\epsilon > 0$ s.e. $f(B_{\delta_\epsilon}(\overline{x}_0) \cap M_f) \subset B_\epsilon(f(\overline{x}_0))$.

Kuvaus f on jatkuva joukossa $A \subset M_f$, jos se on jatkuva jokaisessa A:n pisteessä. Lauseesta 1.2.7 seuraa, että jatkuvien funktioiden $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$ summa $f+g : A \to \mathbb{R}$, tulo $fg : A \to \mathbb{R}$ ja osamäära $f/g : A \to \mathbb{R}$ $(g \neq 0)$ ovat jatkuvia funktioita joukossa A.

$\mathbb{R}^n$:n polynomit ovat muotoa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

missä $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ja $|a| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, sekä $m \in \mathbb{N}$ on polynomin aste.

$\mathbb{R}^n$:n rationaalifunktiot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ovat kahden polynomin osamääriä. Polynomit ovat jatkuvia funktioita koko $\mathbb{R}^n$:ssä, rationaalifunktiot määrittelyjoukossaan eli nimittäjän nollakohtia lukuunottamatta.

Kuten yhden muuttujan funktioilla, jatkuvuus säilyy jatkuvia funktioita yhdistettässä.

Lause 1.2.8. Olkoon n:n muuttujan funktio f jatkuva pisteessä $\overline{x_0}$ ja yhden muuttujan funktio g jatkuva pistessä $f(\overline{x_0})$. Silloin yhdistetty funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä $\overline{x_0}$.

Todistus. Sovelletaan kahteen kertaan Lausetta 1.2.4. □

Esimerkki 1.2.9. Funktiot $\sin \circ f$, $\cos \circ f$ ja $\exp \circ f$ ovat jatkuvia, jos f on jatkuva. Funktio $\ln \circ f$ on jatkuva niissä pisteissä joissa f on jatkuva ja positiivinen.

Lause 1.2.10. (Weierstrassin lause) Jos $A(\subset \mathbb{R}^n)$ on suljettu ja rajoitettu joukko ja f on jatkuva A:ssa, niin f saa suurimman (pienimmän) arvonsa jossakin A:n pisteessä.

1.3 Derivaatta ja differentioituvuus

Osittaisderivaatta: Yhden muuttujan funktion derivaatan käsite voidaan yleistää $\mathbb{R}^n$:ään usealla eri tavallla. Kun *erotusosamäärä* muodostetaan yhden muuttujan suhteen pitämällä muita muuttujia vakioina päädytään osittaisderivaatan määritelmään. Funktiolla f on pisteessä $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *osittaisderivaatta muuttujan* x_i suhteen, jos raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

on olemassa. Tätä raja-arvoa eli osittaisderivaattaa merkitään

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad D_i f, \quad D_{x_i} f, \quad f_i, \quad f_{x_i}, \quad \text{jne.}$$

Osittaisderivaatta voidaan laskea kuten yhden muuttujan tapauksessa pitämällä muita muuttujia vakioina.

Esimerkki 1.3.1. Olkoon $f(x, y) = xy^2$. Tällöin

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy.$$

Funktiolle voidaan muodostaa myös korkeamman kertaluvun osittaisderivaattoja. Esim. funktion $(x, y) \to f(x, y)$ toisen kertaluvun derivaattoja voidaan muodostaa neljä kappaletta:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \qquad f_{yy} &= \tfrac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ f_{xy} &= \tfrac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \qquad f_{yx} &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Näille käytetään myösmerkintöjä $D_{11}f = D_1(D_1 f)$, $D_{22}f = D_2(D_2 f)$, $D_{12}f = D_2(D_1 f)$ ja $D_{21}f = D_1(D_2 f)$.

Esimerkki 1.3.2. Olkoon $f(x, y) = e^{-x+y^2}$. Tällöin

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= -e^{-x+y^2}; \\ f_y(x, y) &= 2ye^{-x+y^2}; \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-e^{-x+y^2}\right) = -2ye^{-x+y^2}; \\ f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2ye^{-x+y^2}\right) = -2ye^{-x+y^2}. \end{aligned}$$

Esimerkin tapauksessa $f_{xy} = f_{yx}$. Yleisesti tämä yhtäsuuruus ei päde, vaan derivointijärjestys saattaa olennaisesti vaikuttaa lopputulokseen. Seuraava lause antaa riittävän ehdon derivoimisjärjestyksen vaihtamiselle.

Lause 1.3.3. Jos osittaisderivaatat f_{xy} ja f_{yx} ovat jatkuvia pisteen $\overline{u}_0 = (x_0, y_0)$ eräässä ympäristössä, niin

$$f_{xy}(\overline{u}_0) = f_{yx}(\overline{u}_0).$$

Lause 1.3.3 voidaan todistaa väliarvolauseen avulla. Sillä on ilmeinen vastineensa korkeamman kertaluvun sekaderivaatoille. $\mathbb{R}^n$:n polynomeilla on kaikkien kertulukujen jatkuvat osittaisderivaatat. Samoin $\mathbb{R}^n$:n rationaalifunktioilla on määritellyjoukossaan kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat.

Gradientti: Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R}^n)$ funktio, jolla on osittaisderivaatat kaikkien muuttujien suhteen pisteessä $\overline{x} \in A$. Funktion f *gradientti*, merk. $\operatorname{grad} f(\overline{x})$ tai $\nabla f(\overline{x})$, pisteessä $\overline{x}$ on vektori

$$\operatorname{grad} f(\overline{x}) = \nabla f(\overline{x}) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\overline{x}), \frac{\partial}{\partial x_2} f(\overline{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\overline{x})\right).$$

Gradientti määrittelee kuvauksen $\operatorname{grad} f = \nabla f : A \to \mathbb{R}^n$ (kun $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\overline{x})$ on olemassa $\forall \overline{x} \in A$ ja $i = 1, \dots, n$). Symbolia ∇ kutsutaan *nablaksi* ja se määritellään muodollisesti lausekkeella

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} \overline{e_i} D_i, \quad \overline{e_i} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0),$$

missä $\overline{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, on $\mathbb{R}^n$:n standardi kantavektori. Nablalla operointi muuttaa reaaliarvoisen funktion f eli ns. *skalaarikentän* vektoriarvoiseksi funktioksi eli *vektorikentäksi* $\nabla f = \operatorname{grad} f$.

Esimerkki 1.3.4. Olkoon $f(x, y, z) = xy + 2xz - y^2 + z^2$ (polynomi). Lasketaan f:n gradientti pisteessä $\overline{u}_0 = (1, -2, 1)$,

$$f_x(x, y, z) = y + 2x, \quad f_y(x, y, z) = x - 2y \quad \text{ja} \quad f_x(x, y, z) = 2x + 2z,$$

joten $f_x(\overline{u}_0) = 0$, $f_y(\overline{u}_0) = 5$ ja $f_z(\overline{u}_0) = 4$. Siten

$$\operatorname{grad} f(\overline{u}_0) = (0, 5, 4) = 5\overline{j} + 4\overline{k},$$

missä $\overline{j} = (0, 1, 0) = \overline{e}_2$ ja $\overline{k} = (0, 0, 1) = \overline{e}_3$.

Differentioituvuus: Yhden muuttujan funktiolle derivoituvuus oli yhtäpitävää differentiaalikehitelmän olemassaolon kanssa:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\epsilon(h), \quad \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

Erityisesti funktion f lisäystä $\Delta f(x_0)$ pisteessä x_0 voidaan approksimoida differentiaalilla $f'(x_0)h$, joka on lisäyksen h suhteen lineaarinen funktio (f:n tangentti pisteessä x_0). Differentiaalimerkinnöin: $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$.

Yleistämme differentiaalikehitelmän usean muuttujan funktioille. Tarkastellaan ensin kahden muuttujan funktiota $f(x,y)$. Funktiolla $f(x,y)$ on differentiaalikehitelmä pisteessä (x_0,y_0), jos on olemassa reaaliluvut a ja b siten, että

$$f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)=ah_1+bh_2+||\overline{h}||\rho(\overline{h}),$$

missä $\rho(\overline{h})\to 0$, kun $||\overline{h}||=\sqrt{h_1^2+h_2^2}\to 0$.

Tällöin sanotaan, että f on *differentioituva* pisteessä (x_0,y_0). Differentioituvan funktion lisäystä Δf voidaan määritelmän nojalla approksimoida kahden muuttujan $\overline{h}=(h_1,h_2)$ lineaarisella funktiolla ah_1+bh_2 eli *f:n differentiaalilla* pisteen (x_0,y_0) läheisyydessä.

Lause 1.3.5. Jos f on differentioituva pisteessä (x_0,y_0), niin f on jatkuva pisteessä (x_0,y_0) ja sillä on pisteessä (x_0,y_0) osittaisderivaatat, joille pätee:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)=a \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)=b.$$

Todistus. Jatkuvuus saadaan seuraavasta lausekkeesta:

$$\lim_{||\overline{h}||\to 0}|f(\overline{x}_0+\overline{h})-f(\overline{x}_0)| \underbrace{\leq}_{\Delta-\text{epäyhtälö}} \lim_{||\overline{h}||\to 0}\big(|a|||\overline{h}||+|b|||\overline{h}||+\rho(\overline{h})||h||\big)=0.$$

Osittaisderivaatat: Valitsemalla differentiaalikehitelmässä $h_2=0$ saadaan

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(x_0+h_1,y_0)-f(x_0,y_0)}{h_1}=\lim_{h_1\to 0}\left(a+\frac{|h_1|}{h_1}\rho((h_1,0))\right)=a.$$

Siis f:n erotusosamäärällä x:n suhteen on raja-arvo pisteessä (x_0,y_0), kun $h_1\to 0$; ts. $\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)=a$. Vastaavasti todistetaan, että $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)=b$. □

Lauseen 1.3.5 nojalla f:n differentiaali pisteessä (x_0,y_0) voidaan esittää muodossa

$$\mathrm{d}f=f_x(x_0,y_0)h_1+f_y(x_0,y_0)h_2.$$

Edelleen käyttämällä gradienttia $\operatorname{grad} f=\nabla f$ saamme

$$\mathrm{d}f=\nabla f\cdot\overline{h}$$

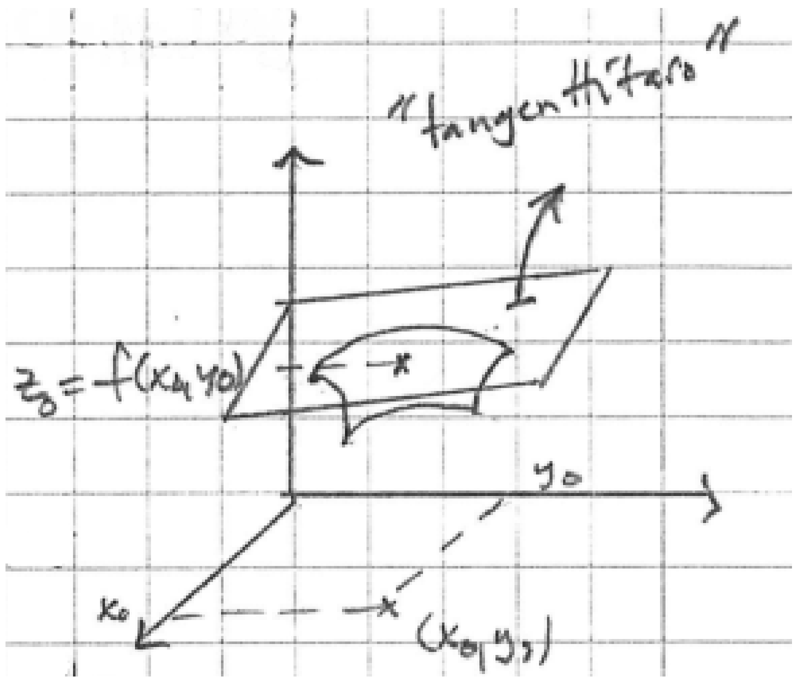
ja korvaamalla lisäys $\overline{h}=(h_1,h_2)$ differentiaaleilla $\mathrm{d}x$ ja $\mathrm{d}y$ voimme kirjoittaa

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

Differentiaalikehitelmän geometriseksi tulkinnaksi saadaan: funktiota f voidaan approksimoida pisteen (x_0,y_0) läheisyydessä f:n tässä pisteessä olevalla ns. *tangenttitasolla.* Siis

$$\Delta f(x_0,y_0)\approx\mathrm{d}f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Pelkkä osittaisderivaattojen olemassaolo pisteessä (x_0,y_0) ei takaa f:n differentioituvuutta pisteessä (x_0,y_0). Sen sijaan, jos f:n osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteessä (x_0,y_0), saadaan Lauseelle 1.3.5 seuraava käänteinen tulos.



Kuva 1.3: Tangenttitaso pisteessä (x_0, y_0), jossa f on differentioituva.

Lause 1.3.6. Jos f:llä on pisteen (x_0, y_0) ympäristössä osittaisderivaatat, jotka ovat jatkuvia pisteessä (x_0, y_0), niin f on differentioituva pisteessä (x_0, y_0).

Todistus. Väliarvolauseen avulla (yksityiskohdat sivuutetaan). □

Yleistetään differentiaalikehitelmä $\mathbb{R}^n$:n reaaliarvoisille funktioille. Funktio $f(\overline{x})$, missä $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on *differentioituva* pisteessä $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, jos sillä on $\overline{x}_0$:ssa *differentiaalikehitelmä*:

$$f(\overline{x}_0 + \overline{h}) - f(\overline{x}_0) = \overline{a} \cdot \overline{h} + ||\overline{h}||\rho(\overline{h}), \qquad \lim_{||\overline{h}|| \to 0} \rho(\overline{h}) = 0,$$

missä $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ja $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_n)$.

Lauseet 1.3.5 ja 1.3.6 yleistyvät suoraan $\mathbb{R}^n$:ään. Erityisesti differentioituvuus takaa osittaisderivaattojen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ ja siten myös f:n gradientin $\operatorname{grad} f = \nabla f$ olemassaolon pisteessä $\overline{x}_0$ ja lisäksi $\operatorname{grad} f(\overline{x}_0) = \nabla f(\overline{x}_0) = \overline{a}$:

$$f(\overline{x}_0 + \overline{h}) - f(\overline{x}_0) = \nabla f(\overline{x}_0) \cdot \overline{h} + ||\overline{h}||\rho(\overline{h}), \qquad \lim_{||\overline{h}|| \to 0} \rho(\overline{h}) = 0.$$

Sisätulo $\nabla f(\overline{x}_0) \cdot \overline{h}$ on f:n *differentiaali* pisteessä $\overline{x}_0$, merk. $\mathrm{d}f(\overline{x}_0) = \nabla f(\overline{x}_0) \cdot \overline{h}$ tai $\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\overline{x}$ eli

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n.$$

Differentioituvuuden sisältö on siinä, että funktiota f voidaan pisteen $\overline{x}_0$ läheisyydessä approksimoida lineaarisella funktiolla, jonka differentiaali $\nabla f(\overline{x}_0) \cdot \overline{h}$ määrää:

$$\Delta f(\overline{x}_0) = f(\overline{x}_0 + \Delta\overline{x}) - f(\overline{x}_0) \approx \mathrm{d}f(\overline{x}_0) = \nabla f(\overline{x}_0) \cdot \Delta\overline{x} \quad \text{(tangenttitaso pisteessä } \overline{x}_0\text{)}.$$

Tätä voidaan käyttää hyväksi virhearvioinnissa: Jos $\Delta\overline{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$ kuvaa muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ virhettä, niin funktioon f syntyvälle *absoluuttiseille virheelle* saadaan arvio

$$\Delta f \approx \nabla f \cdot \Delta\overline{x}$$

ja *suhteelliselle virheelle* arvio

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{\nabla f}{f} \cdot \Delta\overline{x}.$$

Esimerkki 1.3.7. Ympyrälieriön muotoisen säiliön säde on $r = 0,50 \pm 0.01m$ ja korkeus $2,00 \pm 0.01m$. Lasketaan säiliön tilavuus ja tehdään virhearvio tilavuudelle.

$$V = V(r,h) = \pi r^2 h = \pi(0,5)^2 2 \approx 1,57m^3.$$

V:n osittaisderivaatat ovat $V_r = 2\pi rh$ ja $V_h = \pi r^2$. Absoluuttinen virhe on siten:

$$\Delta V \approx 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h = \pi(0,02 + 0,0025) \approx 0,07m^3 \ (= 70l)$$

ja suhteellinen virhe on:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{V_r}{V}\Delta r + \frac{V_h}{V}\Delta h = \frac{2\pi rh}{\pi r^2 h}\Delta r + \frac{\pi r^2}{\pi r^2 h}\Delta h = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h} = 2\frac{0,01}{0.5} + \frac{0,01}{2} = 0,045 \text{ (eli } 4,5\%).$$

Suunnattu derivaatta: Osittaisderivaatat kuvaavat funktionmuutosta koordinaattiakselien suunnassa. Suunnattuun derivaattaan päädytään, kun erotusosamäärän raja-arvo muodostetaan missä tahansa suunnassa. Funktion $f(\overline{x})$ *suunnattu derivaatta* $\partial_{\overline{a}} f(\overline{x}_0)$ pisteessä $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ suuntaan $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $||\overline{a}||^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, määritellään raja-arvona:

$$\partial_{\overline{a}} f(\overline{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{a}) - f(\overline{x}_0)}{h},$$

mikäli se on olemassa. Kun $\overline{a}$ on jonkin koordinaattiakselin suuntainen yksikkövektori, suunnattu derivaattaa yhtyy ko. osittaisderivaattaan.

Esimerkki 1.3.8. Lasketaan funktion $f(x,y) = x^2 y$ derivaatta suuntaan $\overline{a} = (-4,3)$ pisteessä $\overline{x}_0 = (1,2)$. Normeerataan $\overline{a}$ ensin yksikkövektoriksi: $||\overline{a}||^2 = (-4)^2 + 3^2 = 25$ eli $||\overline{a}|| = 5$. Tällöin $\overline{a}_0 = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ on yksikkövektori. Nyt

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{a}_0} f(\overline{x}_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + h\overline{a}_0) - f(\overline{x}_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{(1-\frac{4}{5}h)^2(2+\frac{3}{5}h) - 1^2 \cdot 2}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{13}{5} + \frac{8}{25}h + \frac{48}{125}h^2\right) = -\frac{13}{5}.\end{aligned}$$

Lause 1.3.9. Jos funktio f on differentioituva pisteessä $\overline{x}_0$, niin f:llä on suunnattu derivaatta $\partial_{\overline{a}} f(\overline{x}_0)$ mielivaltaiseen suuntaan $\overline{a}$, $||\overline{a}|| = 1$, ja lisäksi

$$\partial_{\overline{a}} f(\overline{x}_0) = \nabla f(\overline{x}_0) \cdot \overline{a}.$$

Todistus. Kuten osittaisderivaattojen tapauksessa (vrt. Lause 1.3.5). □

Esimerkki 1.3.10. Lasketaan Esimerkin 1.3.8 suunnattu derivaatta Lauseen 1.3.9 avulla. Nyt $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ ja $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$ ovat jatkuvia. $\nabla f(\overline{x}_0) = (2 \cdot 1 \cdot 2, 1^2) = (4, 1)$ ja siten (f differentioituva)

$$\partial_{\overline{a}_0} f(\overline{x}_0) = (4, 1) \cdot (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = \frac{-16}{5} + \frac{3}{5} = -\frac{13}{5}.$$

Huomaa, että f:n differentioituvuus, joka vaaditaan Lauseessa 1.3.9 seuraa osittaisderivaattojen jatkuvuudesta pisteessä $\overline{x}_0$, vrt. Lause 1.3.6.

Useissa sovelluksissa (esim. funktion maksimin ja minimin löytäminen numeerisilla optimointimenetelmillä) on tärkeää löytää suunta, jossa funktio kasvaa voimakkaimmin. Soveltamalla sisätulon lauseketta $\overline{a} \cdot \overline{b} = ||\overline{a}||||\overline{b}|| \cos \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$ Lauseessa 1.3.9 olevaan suunnatun derivaatan kaavaan saadaan

$$\partial_{\overline{a}} f(\overline{x}_0) = ||\nabla f(\overline{x}_0)||||\overline{a}|| \cos \alpha = ||\nabla f(\overline{x}_0)|| \cos \alpha,$$

missä α on gradienttivektorin ja vektorin $\overline{a}$ vähinen kulma. Koska $|\cos \alpha| \leq 1$ ja $\cos \alpha = 1$, kun $\alpha = 0$ ja $\cos \alpha = 0$, kun $\alpha = \pi/2$, sekä $\cos \alpha = -1$, kun $\alpha = \pi$, saamme seuraavan tuloksen.

Lause 1.3.11. Pisteessä $\overline{x}_0$ differentioituvan funktion suunnattu derivaatta $\partial_{\overline{a}} f(\overline{x}_0)$ saavuttaa suurimman arvonsa $||\nabla f(\overline{x}_0)||$, kun $\overline{a}$ on gradienttivektorin $\nabla f(\overline{x}_0)$ suuntainen ja pienimmän arvonsa $-||\nabla f(\overline{x}_0)||$, kun $\overline{a}$ on $\nabla f(\overline{x}_0)$:n suunnalle vastakkainen. Jos $\overline{a} \perp \nabla f(\overline{x}_0)$ (eli $\alpha = \pi/2$), niin $\partial_{\overline{a}} f(\overline{x}_0) = 0$.

Yhdistetyn funktion derivointi: Tarkastellaan yhdistetyn kuvauksen derivointisäännön $D(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x)$ yleistämistä usean muuttujan funktioille. Olkoot $g : A \to \mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^m$) ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tällöin $f \circ g : A \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että f ja g ja että myös niiden (komponenttien) osittaisderivaatat ovat jatkuvia, jolloin f ja g ja siten ilmeisesti myös $f \circ g$ ovat differentioituvia. Jos $m = 1$ ($A \subset \mathbb{R}$), $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $f(y)$:n differentiaalina on

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial y_1} \partial y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \partial y_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n} \partial y_n.$$

Toisaalta $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) = g(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$, joten $y_j'(x) = g_j'(x)$ eli $\partial y_j = g_j'(x) \partial x$, $j = 1, \ldots n$. Saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y_1} g_1'(x) + \frac{\partial f}{\partial y_2} g_2'(x) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n} g_n'(x)$$

eli

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} (D_j f(g(x))) g_j'(x) = \sum_{j=1}^{n} (D_j f(g(x))) D g_j(x).$$

Kun $m > 1$ ja $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, niin $(f \circ g)(\overline{x})$:n osittaisderivaatta $D_i((f \circ g)(\overline{x}))$ ($i = 1, \ldots, m$) saadaan pitämällä muita x-muuttujia x_k, $k \neq i$, vakioina:

Lause 1.3.12. Ketjusääntö differentioituville kuvauksille on

$$D_i(f \circ g)(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} (D_j f(g(\overline{x}))) D_i g_j(\overline{x}), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Esimerkki 1.3.13. Olkoon $f(x,y,z) = x^2y - 4yz - z^2$, $x = \sin t$, $y = \cos t$ ja $z = 2t$. Lasketaan $\frac{\partial}{\partial t}(f \circ g)$, missä $g(t) = (x,y,z)$. Ketjusääntö antaa:

$$\frac{\partial}{\partial t}((f \circ g)(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

eli

$$\begin{aligned} D((f \circ g)(t)) &= (2x(t)y(t))(\cos t) + (x(t)^2 - 4z(t))(-\sin t) + (-4y(t) - 2z(t)) \cdot 2 \\ &= 2\sin t \cos^2 t - \sin^2 t + 8t \sin t - 8\cos t - 8t. \end{aligned}$$

1.4 Funktion ääriarvoista

Lokaalit ääriarvot määritellään kuten yhden muuttujan tapauksessa korvaamalla väli $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ pisteen $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ palloympäristöllä.

Lause 1.4.1. Olkoon f:llä 1. kertaluvun osittaisderivaatat pisteessä $\overline{u}_0 \in \mathbb{R}^n$. Jos f:llä on ääriarvo pisteessä $\overline{u}_0$, niin $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{u}_0) = 0$ kaikilla $i = 1,\ldots,n$, ts. $\nabla f(\overline{u}_0) = 0$.

Todistus. Olkoon $\overline{u}_0 = (u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_n)$ ja määritellää yhden muuttujan funktiot $\phi_i(x) = f(u_1,\ldots,x,\ldots,u_n)$, $i = 1,\ldots,n$. Jos $\overline{u}$ on f:n ääriarvopiste, niin se on myös $\phi_i(x)$:n ääriarvopiste. Nyt ϕ_i on derivoituva pisteessä $x = u_i$, joten välttämättä $0 = \phi_i'(u_i) = D_i f(\overline{u}_0)$. □

Esimerkki 1.4.2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = (1+y^2)x^2 + (2x+1)y^2 + 1$. Ääriarvot: f:llä on osittaisderivaatat koko $\mathbb{R}^2$:ssä:

$$f_x(x,y) = 2(x + xy^2 + y^2) \quad \text{ja} \quad f_y(x,y) = 2y(x^2 + 2x + 1).$$

Suora lasku antaa

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0; \\ f_y(x,y) = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

Siis $(0,0)$ on ainoa mahdollinen f:n ääriarvopiste. Itse asiassa selvästi $f(x,y) \geq 1$ ja $f(0,0) = 1$. Eli f:llä on globaali minimi origossa.

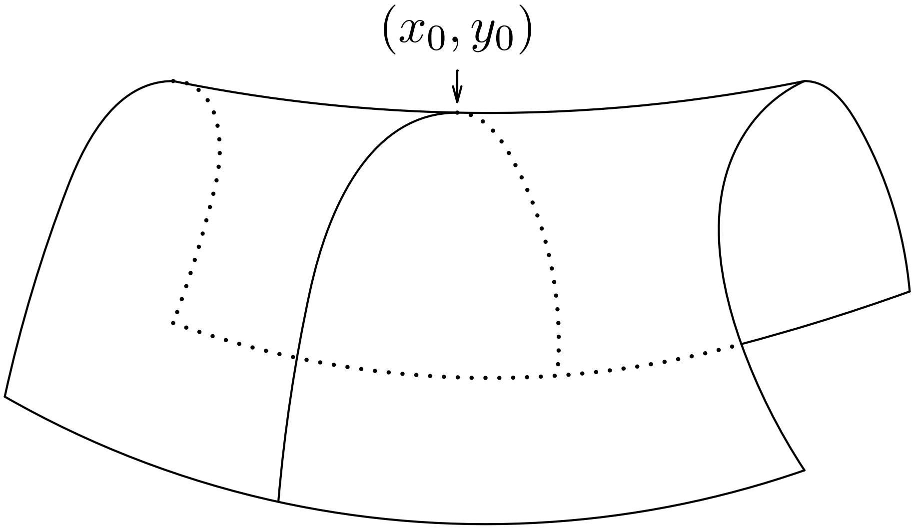
Tarkastellaan nyt kahden muuttujan funktioita $f(x,y)$. Otetaan käyttöön 2. kertaluvun osittaisderivaattoihin liittyvän 2×2-matriisin determinantti:

$$D = D_f(x,y) = \det\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)f_{yx}(x,y).$$

Lause 1.4.3. Olkoot $f(x,y)$:n 1. ja 2. kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia pisteen (x_0,y_0) jossakin ϵ-ympäristössä ja oletetaan, että $f_x(x_0,y_0) = 0 = f_y(x_0,y_0)$. Tällöin:

(i) jos D $(= f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)f_{yx}(x,y)) > 0$, niin f:llä on lokaali ääriarvo pisteessä (x_0,y_0). Jos lisäksi $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, niin (x_0,y_0) on *lokaali maksimipiste* ja vastaavasti jos $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, niin (x_0,y_0) on f:n *lokaali minimipiste*;

(ii) jos $D < 0$, niin f:llä ei ole ääriarvoa pisteessä (x_0,y_0).



Kuva 1.4: Satulapiste.

Huom.: a) Tapauksessa $D = 0$ Lause 1.4.3 ei anna mitään informaatiota: piste (x_0, y_0) voi olla f:n minimi- tai maksimipiste, tai ei kumpaakaan. b) Tapauksessa $D < 0$ piste (x_0, y_0) on f:n ns. "satulapiste"; katso Kuva 1.4.

Esimerkki 1.4.4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$. Ääriarvot?

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y \quad \text{ja} \quad f_y(x, y) = 3y^2 + 3x.$$

Nyt

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0; \\ f_y(x, y) = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \end{cases} \text{tai} \begin{cases} x = -1; \\ y = -1. \end{cases}$$

Koska,

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{xy}(x, y) = 3 = f_{yx}(x, y) \quad \text{ja} \quad f_y y(x, y) = 6y.$$

nyt $D_f(0, 0) = 0 \cdot 0 - 3^2 = -9 < 0 \ \Rightarrow$ pisteessä $(0, 0)$ ei ääriarvoa. Toisaalta $D_f(-1, -1) = (-6)(-6) - 3^2 = 27 > 0$ ja lisäksi $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$, joten f:llä on lokaali maksimi pisteessä $(-1, -1)$: $f(-1, -1) = 1$.

Globaalit ääriarvot: Lauseen 1.3.3 mukaan, jos f on jatkuva funktio, joka on määritelty suljetussa ja rajoitetussa osajoukossa $A \subset \mathbb{R}^n$, niin f saa suurimman ja pienimmän arvonsa jossakin A:n pisteessä. Jos f_x ja f_y ovat olemassa kaikissa A:n sisäpisteissä, niin suurin ja pienin arvo saavutetaan joko

(a) A:n sellaisessa sisäpisteessä, jossa $f_x = 0 = f_y$ tai

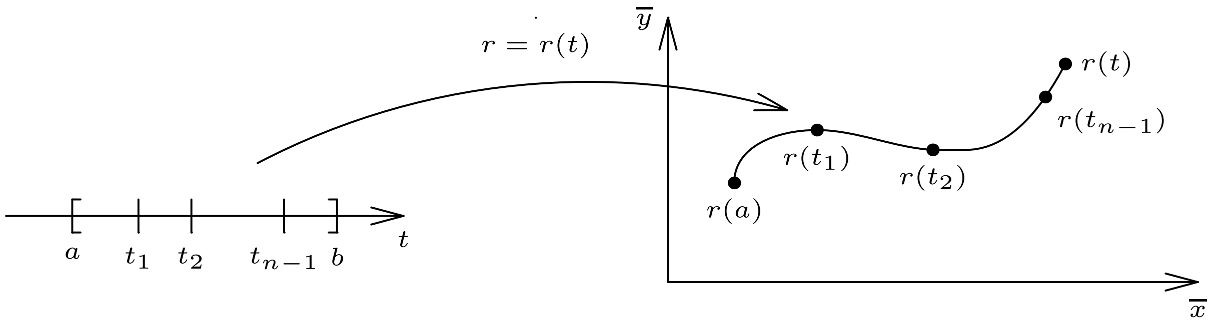
(b) jossakin joukon A reunapisteessä.

Luku 2: Usean muuttujan funktioiden integraalilaskentaa

2.1 Käyräintegraali

Käyräintegraali antaa erään yleistyksen määrätylle integraalille $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, kun integroitavana on usean muuttujan funktio. Käyräintegraalissa x-akselin väli $[a,b]$ korvataan käyrällä, jota pitkin integrointi suoritetaan.

Tarkastellaan ensin tapausta $\mathbb{R}^2$. Olkoon C $\mathbb{R}^2$:n käyrä, joka on suljetun $\mathbb{R}^1$:n välin $[a,b]$ kuva jatkuvassa kuvauksessa $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Oletamme, että r on injektio, ts. C ei leikkaa itseään; tällöin C:tä kutsutaan *kaareksi*.



Kuva 2.1: Kaari $\mathbb{R}^2$:ssa.

Piste $r(a)$ on C:n *alkupiste* ja $r(b)$ C:n *loppupiste*. Olkoon nyt $f = (f_1, f_2) : C \to \mathbb{R}^2$, missä f_1 ja f_2 ovat rajoitettuja reaalifunktioita. Muodostetaan C:n jako D osakaariin C_k C:n jakopisteillä $r(t_k)$, missä

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b.$$

Valitaan jokaiselta osakaarelta C_k mielivaltainen piste z_k ja muodostetaan summa

$$Z_D := \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \cdot \underbrace{(r(t_k) - r(t_{k-1}))}_{\Delta r_k}.$$

Jos Z_D:llä on raja-arvo, kun jaon D normi $|D| := \max_k ||\Delta r_k|| \to 0$, joka ei muuten riipu jaosta D eikä pisteiden Z_k valinnasta, kutsutaan ko. raja-arvoa funktion f *käyräintegraaliksi pitkin kaarta* C ja merkitään

$$\int_C f(t) \cdot \mathrm{d}r := \lim_{|D|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \cdot \Delta r_k.$$

Käyräintegraalille saadaan koordinaattiesitys, kun C esitetään parametrimuodossa $r(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\bar{\imath} + y(t)\bar{\jmath}$:

$$\int_C f(t) \cdot \mathrm{d}r = \lim_{|D_t| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[f_1(r(\eta_k))\Delta x_k + f_2(r(\eta_k))\Delta y_k \right],$$

missä $r(\eta_k) = z_k$, $\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$ ja $\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1})$. Tällöin f:n käyräintegraali yli C:n voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_C f(r) \cdot \mathrm{d}r = \int_C (f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y).$$

Käyrä C oletetaan yleensä *säännölliseksi kaareksi*, ts. oletetaan, että $r(t)$ tai yhtäpitävästi $x(t)$ ja $y(t)$ ovat jatkuvasti derivoituvia t:n suhteen (ja että $r'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$).

Lause 2.1.1. Olkoon C säännöllinen kaari $\mathbb{R}^2$:ssa parametriesityksenään $r(t)$, $t \in [a, b]$, ja olkoon $f : C \to \mathbb{R}^2$ jatkuva. Tällöin $f(t) \cdot \mathrm{d}r$ on integroituva yli kaaren C ja

$$\int_C f(r) \cdot \mathrm{d}r = \int_a^b f(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b \left[f_1(r(t))x'(t) + f_2(r(t))y'(t) \right] \mathrm{d}t.$$

Todistus. Perustuu väliarvolauseeseen. □

Esimerkki 2.1.2. Olkoon C $\mathbb{R}^2$:n pisteestä $(2, 4)$ pisteeseen $(0, 0)$ kulkeva paraabelin kaari $y = x^2$ ja olkoon $f(x, y) = (x + 1)\bar{\imath} + xy\bar{\jmath}$. Lasketaan f:n käyräintegraali yli C:n.

C:n parametriesitys on $x = t$, $y = t^2$, jolloin $r(t) = t\bar{\imath} + t^2\bar{\jmath}$. Selvästi r on jatkuvasti derivoituva ja $r'(t) = \bar{\imath} + 2t\bar{\jmath}$. Koska $r(0) = (0, 0)$ ja $r(2) = (2, 4)$, antaa $t = 2$ alkupisteen ja $t = 0$ loppupisteen. Lauseen 2.1.1 nojalla saadaan

$$\int_C f(r) \cdot \mathrm{d}r = \int_2^0 \left[(t + 1) \cdot 1 + (t \cdot t^2) \cdot (2t) \right] \mathrm{d}t = \int_2^0 (2t^4 + t + 1) \mathrm{d}t = \Big|_2^0 \left(\frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^2 + t \right) = -\frac{84}{5}.$$

Kuten esimerkki osoittaa käyräintegraalia laskettaessa etenemissuunta on olennainen; jos kulkusuunta vaihdetaan käänteiseksi (loppupiste $\Leftrightarrow$ alkupiste), käyräintegraalin arvo muuttaa merkkiään. Lauseesta 2.1.1 saadaan myös seuraavat käyräintegraalin ominaisuudet:

a) $\int_C (af + bg) \cdot \mathrm{d}r = a \int_C f \cdot \mathrm{d}r + b \int_C g \cdot r$, missä $a, b \in \mathbb{R}$;

b) $\int_C f \cdot \mathrm{d}r = \int_{C_1} f \cdot \mathrm{d}r + \int_{C_2} f \cdot \mathrm{d}r$, kun kaari C_1 on käyrän C alkuosa ja C_2 sen loppuosa.

Ominaisuutta b) voidaan käyttää apuna, kun halutaan laskea käyräintegraali yli *paloittain säännöllisen käyrän C*: Jaetaan C peräkkäisiin osakaariin $C_1, \ldots, C_p$, jotka ovat säännöllisiä ja lasketaan $\int_{C_i} f \cdot \mathrm{d}r$, $i = 1, \ldots, p$, käyttämällä Lausetta 2.1.1, jolloin $\int_C f \cdot \mathrm{d}r = \sum_{i=1}^{p} \int_{C_i} f \cdot \mathrm{d}r$ kohdan b) nojalla.

Käyräintegraali voidaan ilmeisin muutoksin yleistää $\mathbb{R}^n$:ään. Lauseen 2.1.1 vastine säännölliselle kaarelle C $\mathbb{R}^n$:ssä ja jatkuvalle funktiolle $f = (f_1, \ldots, f_n) : C \to \mathbb{R}^n$ on

$$\int_C f \cdot \mathrm{d}r = \int_a^b f(r(t)) \cdot r'(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(r(t))x_k'(t) \mathrm{d}t,$$

missä $r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ on jatkuvasti derivoituva (ja $r'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$).

Käyräintegraalille voidaan antaa fysikaalinen tulkinta: Jos f on voima, joka vaikuttaa kappaleeseen sen kulkiessa pitkin käyrää C, niin voiman suorittama työ käyrällä C on

$$W = \int_C f \cdot \mathrm{d}r.$$

Integrointi kaarenpituuden suhteen: Olkoon C säännöllinen kaari $r(t)$, $t \in [a, b]$, tasossa (tai yleisemmin $\mathbb{R}^n$:ssä) parametriesityksenä $r(t) = (x(t), y(t))$. Tällöin osaväliä $[a, t_0]$, $a < t_0 \leq b$, vastaavan C:n osakaaren pituus S saadaan integraalina

$$S = \int_a^{t_0} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = \int_a^{t_0} ||r'(t)||\mathrm{d}t,$$

missä $r'(t) = (x'(t), y'(t))$ ja $||r'(t)|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ (vrt. Mat. men. I). Tällöin $S = S(t)$ on t:n suhteen kasvava funktio ja $S(b) = L$ on kaaren C pituus. Lisäksi $S'(t) = ||r'(t)||$.

Funktion $f : C \to \mathbb{R}$ *integraalilla kaarenpituuden suhteen pitkin kaarta* C tarkoitetaan integraalia

$$\int_C f\mathrm{d}s = \int_a^b f(r(t)) \underbrace{||r'(t)||\mathrm{d}t}_{=\mathrm{d}s} = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

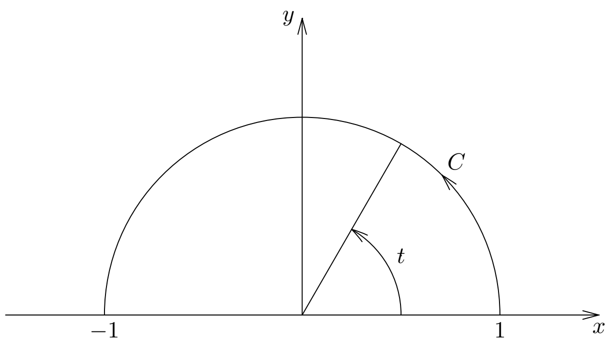
Jos $C \subset \mathbb{R}^n$ ja $r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, kaava saa muodon

$$\int_C f\mathrm{d}s = \int_a^b f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \sqrt{(x_1'(t))^2 + \ldots + (x_n'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Vastaavasti vektoriarvoisen funktion $f = (f_1, \ldots, f_m) : C \to \mathbb{R}^m$ *integraali kaarenpituuden suhteen pitkin kaarta* C määritellään komponenttien $f_i : C \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, avulla:

$$\int_C f\mathrm{d}s := \left(\int_C f_1\mathrm{d}s, \ldots, \int_C f_m\mathrm{d}s \right).$$

Esimerkki 2.1.3. Lasketaan $\int_C (2+x^2y)\mathrm{d}s$, kun C on $\mathbb{R}^2$:n yksikköympyrän $x^2+y^2 = 1$ ylempää puoliskoa vastaava kaari (suunnistettuna vastapäivään):



Kuva 2.2: Integrointi puoliympyrän kehän yli.

Parametriesitys: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi]$. Siten

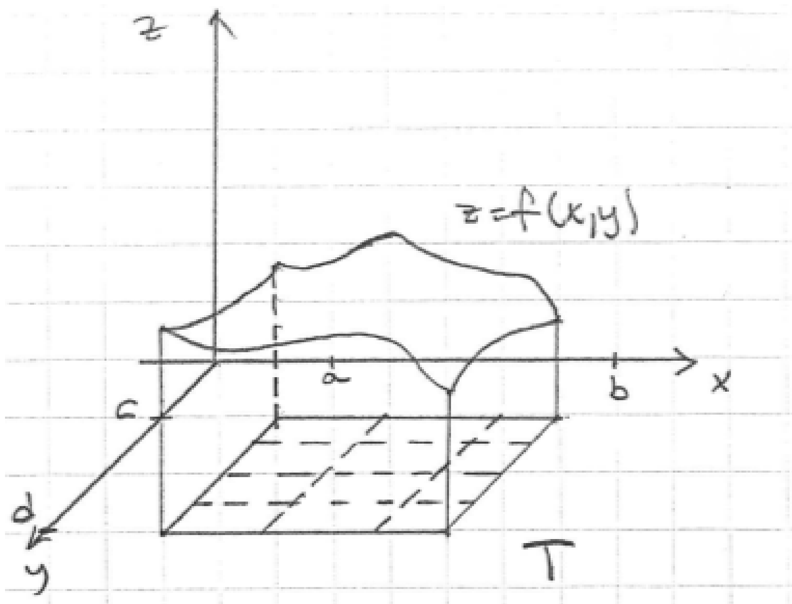
$$\int_C (2 + x^2 y) \mathrm{d}s = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\underbrace{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}_{=1}} \mathrm{d}t = |_0^\pi \left(2t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right)$$
$$= 2\pi - \frac{1}{3}(-1)^3 - \left(0 - \frac{1}{3}\right) = 2\pi + \frac{2}{3}.$$

Integraalia kaarenpituuden suhteen voidaan käyttää esim. kaaren *painonpisteen* määrittämiseksi. Jos C on $\mathbb{R}^n$:n kaari $r(t)$, $t \in [a, b]$, jolla on pisteessä $r(t)$ tiheys $\rho(r(t))$, niin C:n painopiste on

$$r_0 = \frac{\int_C r \rho(r) \mathrm{d}s}{\int_C \rho(r) \mathrm{d}s}.$$

2.2 Tasointegraali

Olkoon $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\} \subset \mathbb{R}^2$ suljettu suorakulmio tasossa ja olkoon $f : T \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Määritellään f:n integraali yli suorakulmion T.



Kuva 2.3: Funktion f integraali yli suorakulmion T.

Integraalin muodostamiseksi jaetaan integrointialue T osasuorakulmioihin T_{ij} välien $[a, b]$ ja $[c, d]$ jaoilla

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d.$$

Ko. jakojen avulla määritellään T_{ij} seuraavasti:

$$T_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j\}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Olkoon T_{ij}:n ala $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$. Valitaan kustakin osasuorakulmiosta mielivaltainen piste $(s_i, t_i) \in T_{ij}$ ja muodostetaan T:n jakoa D vastaava summa

$$S_D = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(s_i, t_j) \Delta A_{ij},$$

joka approksimoi suorakulmion T ja f:n määräämän pinnan rajoittaman kappaleen tilavuutta. Jos S_D:llä on raja-arvo, kun jako D tihenee rajatta ($d(A_{ij}) \to 0$) sanotaan *funktiota f integroituvaksi suorakulmiossa T* ja ko. raja-arvoa *f:n tasointegraaliksi yli suorakulmion T*; merk.

$$\int_T f = \iint_T f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Jos $f(x, y) \geq 0$, antaa tämä kaksoisintegraali T:n ja f:n rajoittaman kappaleen tilavuuden. Tasointegraali on Riemannin integraalin vastine kahden muuttujan funktioille. Kuten yhden muuttujan tapauksessa pätee:

Lause 2.2.1. Jos $f : T \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f on integroituva yli T:n.

Tasointegraali voidaan helposti yleistää $\mathbb{R}^2$:n rajoitetuille joukoille A ja funktiolle $f : A \to \mathbb{R}$. Tätä varten määritellään joukon A *karakteristinen funktio* 1_A:

$$1_A(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jos } (x, y) \in A; \\ 0, & \text{jos } (x, y) \notin A. \end{cases}$$

Merk. lisäksi $f_A = 1_A \cdot f$, jolloin f_A voidaan tulkita koko $\mathbb{R}^2$:ssa määritellyksi rajoitetuksi funktioksi:

$$f_A(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{jos } (x, y) \in A; \\ 0, & \text{jos } (x, y) \notin A. \end{cases}$$

Valitsemalla nyt suorakulmio $T \supset A$ saadaan *f:n (taso)integraali määriteltyä yli joukon A* kaavalla

$$\int_A f = \int_T f_A = \iint_T f_A(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

edellyttäen, että ko. integraali on olemassa.

Tasointegraalilla on seuraavat ominaisuudet:

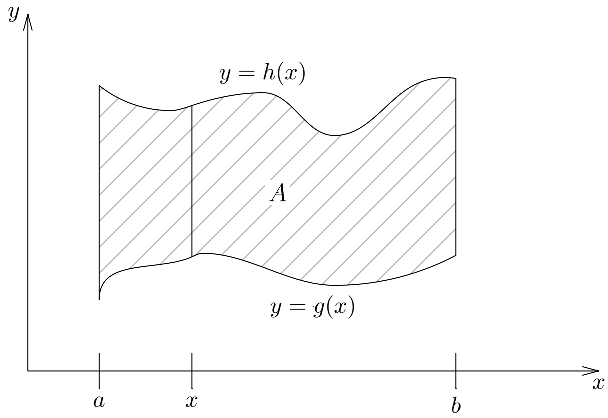
a) $\int_A (af + bg) = a \int_A f + b \int_A g$, missä $a, b \in \mathbb{R}$;

b) jos joukot A_1 ja A_2 ovat *pistevieraita* eli $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, niin

$$\int_{A_1 \cup A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f.$$

Huom. Joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ pinta-ala saadaan tasointegraalina:

$$A\text{:n pinta-ala} = \int_A 1_A = \int_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



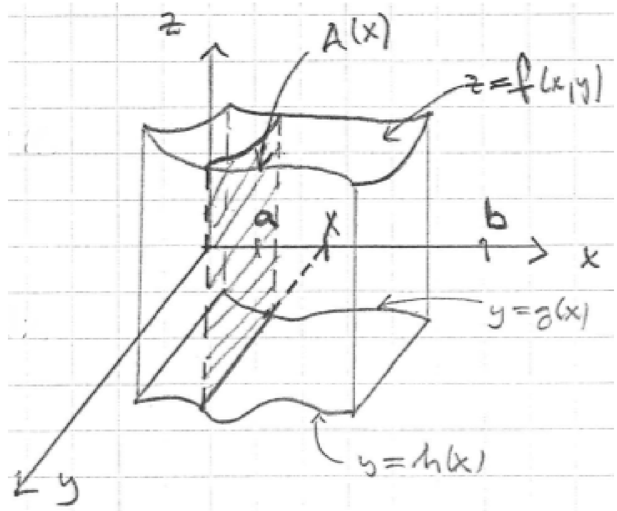
Kuva 2.4: Integrointialue Lauseessa 2.2.2.

Lause 2.2.2. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$, missä $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia. Tällöin jatkuvan funktion $f : A \to \mathbb{R}$ integraali yli A:n on olemassa ja

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Perustelu: $A(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y$ on poikkileikkauksen pinta-ala pisteessä x. Joten kappaleen tilavuus on :

$$\int_a^b A(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$



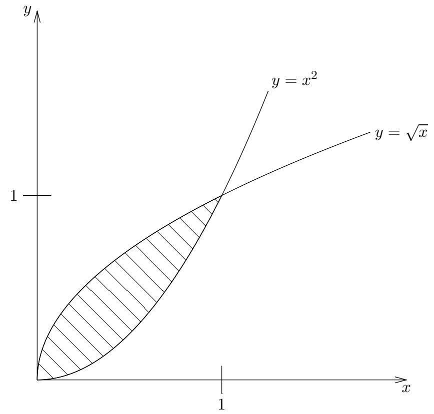
Kuva 2.5: Lauseen 2.2.2 integraalin geometrinen havainnollistus.

Esimerkki 2.2.3. $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2\}$.

$$\begin{aligned}\int_T (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_2^4 \left(\int_1^2 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_2^4 \left(|_1^2 x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \mathrm{d}x = \int_2^4 \left(x^2 + \frac{7}{3} \right) \mathrm{d}x \\ &= |_2^4 \frac{1}{3} x^3 + \frac{7}{3} x = 23\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Esimerkki 2.2.4. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.

$$\begin{aligned}\int_A y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(|_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{1}{3} y^3 \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int_0^1 (x^{3/2} - x^6)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3} |_0^1 \left(\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{7} x^7 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{3}{35}.\end{aligned}$$



Kuva 2.6: Esimerkin 2.2.4 integrointialue.

Huom.: Lauseessa 2.2.2 muuttujien x ja y roolit voidaan vaihtaa:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ p(y) \le x \le q(y)\}.$$

Huomaa, että tällöin myös integrointijärjestys muuttujien x ja y suhteen vaihtuu:

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Pintaintegraali tasossa voidaan yleistää samalla tavalla kuin määrätty integraali yleistettiin reaaliakselin väliltä käyräintegraaliksi. Tällöin tasoalue A korvataan 2-parametrisella pinnalla ja integrointi suoritetaan yli tälläisen pinnan. Asiaan palataan seuraavassa luvussa.

2.3 Avaruusintegraali

Tasointegraali voidaan helposti yleistää *avaruusintegraaliksi*. Korvataan $\mathbb{R}^2$:n suorakulmio T suorakulmaisella särmiöllä $\mathbb{R}^3$:ssa:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \le x \le a_2,\ b_1 \le y \le b_2,\ c_1 \le z \le c_2\}$$

ja määritellään funktion $f : T \to \mathbb{R}$, joka on rajoitettu, (Riemann-)integroituvuus yli T:n käyttämällä T:n jakoon D liittyvän summan

$$S_D = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} f(s_i, t_j, u_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

raja-arvon olemassaoloa, kun jako D tihenee rajatta eli $|D| \to 0$. Jos ko. raja-arvo on olemassa, sitä sanotaan f:n *avaruusintegraaliksi yli särmiön* T, merk.

$$\int_T f = \iiint_T f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Jos f on jatkuva kuvaus $T \to \mathbb{R}$, niin ko. integraali (raja-arvo) on olemassa. Avaruusintegraali suorakulmaista särmiötä yleisemmän $\mathbb{R}^3$:n kappaleen V yli määritellään ottamalla jälleen käyttöön f:n *nollajatko* (nyt $\mathbb{R}^3$:ssa):

$$f_V(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{jos } (x, y, z) \in V; \\ 0, & \text{jos } (x, y, z) \notin V. \end{cases}$$

Valitaan suorakulmainen särmiö $T \supset V$ ja asetetaan

$$\int_V f = \int_T f_V = \iiint_T f_V(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Avaruusintegraalilla on vastaavat ominaisuudet kuin tasointegraalilla. Erityisesti V:n tilavuus saadaan kolmoisintegraalina $\int_V 1_V = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ (tässä 1_V on V:n karakteristinen funktio).

Esimerkki 2.3.1. Kappaleen $V \subset \mathbb{R}^3$, jonka massatiheys pisteessä $(x, y, z) \in V$ on $\rho(x, y, z)$, paino saadaan integraalina

$$m_V = \iiint_V \rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

ja painopiste $\overline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ kaavalla

$$\overline{r}_0 = \frac{1}{m_V} \iiint_V \overline{r}\rho(\overline{r})\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

missä $\overline{r} = (x, y, z)$ on vektoriarvoinen funktio, jonka avaruusintegraalit lasketaan komponenteittain.

Lause 2.2.2 voidaan yleistää avaruusintegraaleille esim. seuraavasti: Olkoon

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \le x \le a_2,\ b_1(x) \le y \le b_2(x),\ c_1(x, y) \le z \le c_2(x, y)\},$$

missä $b_1(x)$, $b_2(x)$, $c_1(x,y)$ ja $c_2(x,y)$ ovat jatkuvia funktioita. Tällöin jatkuvan funktion $f : V \to \mathbb{R}$ avaruusintegraali on

$$\int_V f = \int_{a_1}^{a_2} \left[\int_{b_1(x)}^{b_2(x)} \left(\int_{c_1(x,y)}^{c_2(x,y)} f(x,y,z) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Esimerkki 2.3.2. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy\}$ ja $f(x,y,z) = 8xyz$. Lasketaan $\int_V f$ yllä annetun säännön nojalla seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int_V f &= \int_0^1 \left[\int_0^x \left(\int_0^{xy} 8xyz \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\int_0^x \left(|_0^{xy} 4xyz^2 \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^x 4x^3y^3 \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[|_0^x x^3y^4 \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 x^7 \mathrm{d}x = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

2.4 Muuttujien vaihto integraalissa

Kuten yhden muuttujan tapauksessa hankalat integraalit voidaan usein palauttaa yksinkertaisemmiksi sijoituskeinolla eli muuttujan vaihdolla. Usean muuttujan funktioiden tapauksessa muuttujan vaihto vaatii ns. *Jacobin (funktionaali-)determinantin* käyttöönottoa. Tarkastellaan kolmen muuttujan funktion $f(x,y,z)$ tapausta. Otetaan käyttöön uudet muuttujat (u,v,t):

$$x = x(u,v,t), \quad y = y(u,v,t) \quad \text{ja} \quad z = z(u,v,t).$$

Nämä oletetaan yleensä kerran/kaksi kertaa jatkuvasti derivoituviksi funktioiksi ja edelleen, että $(u,v,t,) \to (x,y,z)$ on bijektio. Vastaava Jacobin determinantti on

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Tehdyistä oletuksista seuraa, että $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)} \neq 0$.

Lause 2.4.1. Muuttujanvaihdossa $(x,y,z) \to (u,v,t)$ jatkuvan funktion $f : V \to \mathbb{R}$ integraali yli V:n saadaan kaavalla

$$\iiint_V f(x,y,z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_S \widetilde{f}(u,v,t) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}t,$$

missä $\widetilde{f}(u,v,t) = f(x(u,v,t), y(u,v,t), z(u,v,t))$ ja S on V:n kuvajoukko muunnoksessa $(x,y,z) \to (u,v,t)$.

Vastaava tulos pätee myös $\mathbb{R}^n$:ssä.

Esimerkki 2.4.2. Napakoordinaatit $\mathbb{R}^2$:ssa: $x = r\cos\phi$ ja $y = r\sin\phi$. Tällöin

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r.$$

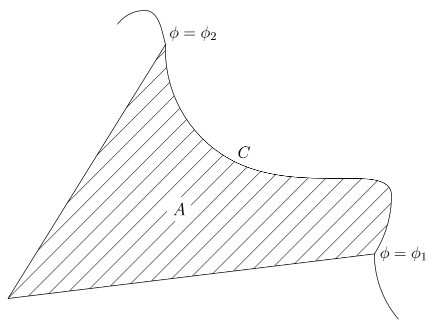
Jos nyt alue $A \subset \mathbb{R}^2$ esitetään (x, y)-koordinaattien asemasta napakoordinaateissa ja $f : A \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \underbrace{=}_{r\geq 0} \iint_{\widetilde{A}} f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi,$$

missä $\widetilde{A}$ on alue A ilmaistuna napakoordinaateissa.

Jos A on esimerkiksi napakoordinaattien avulla määritellyn käyrän $C = \{r(\phi) : 0 \leq \phi \leq \pi\}$ ja säteiden ϕ_1 ja ϕ_2 rajaama alue, niin sen pinta-ala on:

$$\int_A 1 = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{r(\phi)} 1 \cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left(\Big|_0^{r(\phi)} \frac{1}{2} r^2 \right) \mathrm{d}\phi = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi.$$



Kuva 2.7: Napakoordinaateissa olevan käyrän ja kahden kulman väliin jäävän alueen pinta-ala.

Esimerkki 2.4.3. Pallokoordinaatit $\mathbb{R}^3$:ssa (vrt. sivu 5 ja Kuva 1.2):

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, & r \geq 0; \\ y = r\sin\theta\sin\phi, & 0 \leq \theta \leq \pi; \\ z = r\cos\theta, & 0 \leq \phi < 2\pi. \end{cases}$$

Nyt

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} - (-r\sin\theta) \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} \\ &= \cos\theta\, r^2(\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\phi) + r^2\sin\theta(\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi) \\ &= r^2[\cos^2\theta\sin\theta + \sin\theta\sin^2\Theta] = r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

Huomaa, että $r^2\sin\theta \geq 0$, koska $0 \leq \theta \leq \pi$.

Esimerkki 2.4.4. Lasketaan $I := \iiint_{B_{r_0}(\bar{0})}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Siirrytään pallokoordinaatteihin:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{B_{r_0}(\bar{0})} r^2 \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \iiint_{B_{r_0}(\bar{0})} r^2 \cdot r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left(\int_0^{r_0} r^4 \sin\theta\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{1}{5}r_0^5 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{r_0^5}{5}\int_0^{2\pi}\left[|_0^{\pi} -\cos\theta\right]\,d\phi = \frac{r_0^5}{5}\int_0^{2\pi} 2\,\mathrm{d}\phi = \frac{4}{5}\pi r_0^5.
\end{aligned}$$

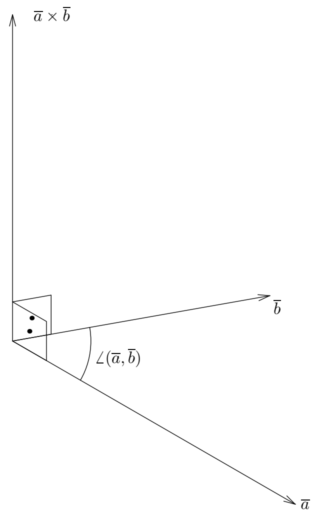
Luku 3: Vektorianalyysiä

3.1 Vektoritulo eli ristitulo

Vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ *vektoritulo eli ristitulo* määritellään seuraavasti:

$$\overline{a} \times \overline{b} := ||\overline{a}||||\overline{b}|| \sin \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})\overline{e},$$

missä $\overline{e}$ on yksikkövektori ($||\overline{e}|| = 1$), joka on kohtisuorassa $\overline{a}$:n ja $\overline{b}$:n määräämää tasoa vastaan $\mathbb{R}^3$:ssa niin, että kolmikko $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ muodostaa ns. *oikeakätisen järjestelmän*: kun oikean käden peukalo osoittaa $\overline{a}$:n suuntaan ja etusormi $\overline{b}$:n suuntaan, niin keskisormi osoittaa $\overline{e}$:n eli $\overline{a} \times \overline{b}$:n suuntaan.



Kuva 3.1: Oikeakätinen järjestelmä.

Jos $\overline{a}||\overline{b}$, niin $\overline{a} \times \overline{b} = 0$. Samoin $\overline{a} \times \overline{0} = \overline{0} = \overline{0} \times \overline{b}$.

Huom.: $||\overline{a} \times \overline{b}|| = ||\overline{a}||||\overline{b}|| \sin \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$ (≥ 0), sillä $0 \leq \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) \leq 180°$. Vektorin $\overline{a} \times \overline{b}$ pituus voidaan siten geometrisesti tulkita vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ määräämän suunnikkaan pinta-alana.

Lause 3.1.1. Olkoot $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ vektoreita ja $p, q \in \mathbb{R}$. Tällöin

(i) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$ (antikommutatiivisuus);

(ii) $(p\overline{a}) \times (q\overline{b}) = (pq)(\overline{a} \times \overline{b})$ (skalaarin siirto);

(iii) $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$ (osittelulaki);

(iv) $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$ (osittelulaki).

Todistus. Suora lasku määritelmään nojautuen. □

$\mathbb{R}^3$:n kantavektoreille saadaan:

$$\begin{cases} \bar{\imath} \times \bar{\imath} = \bar{\jmath} \times \bar{\jmath} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}; \\ \bar{\imath} \times \bar{\jmath} = \bar{k}, \quad \bar{\jmath} \times \bar{k} = \bar{\imath}, \quad \bar{k} \times \bar{\imath} = \bar{\jmath}; \\ \bar{\jmath} \times \bar{\imath} = -\bar{k}, \quad \bar{k} \times \bar{\jmath} = -\bar{\imath}, \quad \bar{\imath} \times \bar{k} = -\bar{\jmath}. \end{cases}$$

Yhdistämällä tämä Lauseeseen 3.1.1 saadaan vektoreiden

$$\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}$$

vektoritulolle $\bar{a} \times \bar{b}$ seuraava koordinaattiesitys:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (a_xb_x)\bar{\imath} \times \bar{\imath} + (a_xb_y)\bar{\imath} \times \bar{\jmath} + (a_xb_z)\bar{\imath} \times \bar{k} \\ &+ (a_yb_x)\bar{\jmath} \times \bar{\imath} + (a_yb_y)\bar{\jmath} \times \bar{\jmath} + (a_yb_z)\bar{\jmath} \times \bar{k} \\ &+ (a_zb_x)\bar{k} \times \bar{\imath} + (a_zb_y)\bar{k} \times \bar{\jmath} + (a_zb_z)\bar{k} \times \bar{k} \\ &= (a_yb_z - a_zb_y)\bar{\imath} + (a_zb_x - a_xb_z)\bar{\jmath} + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{k} \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} \\ &= \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Siis $\bar{a} \times \bar{b}$ saadaan muodollisesti yo. 3-rivisenä determinanttina.

Esimerkki 3.1.2. $\bar{a} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + 2\bar{k}$ ja $\bar{b} = -\bar{\imath} - \bar{\jmath} + 3\bar{k}$.

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1))\bar{\imath} - (1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1))\bar{\jmath} + (1 \cdot (-1) - (-1)^2)\bar{k} \\ &= -\bar{\imath} - 5\bar{\jmath} - 2\bar{k}. \end{aligned}$$

$||\bar{a} \times \bar{b}|| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{30}$ (suunnikkaan pinta-ala).

3.2 Skalaarikolmitulo

Kolmen vektorin ns. *skalaarikolmitulo* $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ voidaan laskea 3-rivisenä determinanttina:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Lause 3.2.1. Skalaarikolmitulolle pätee mm.

(i) $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = -\bar{a} \cdot (\bar{c} \times \bar{b}) = -\bar{b} \cdot (\bar{a} \times \bar{c}) = -\bar{c} \cdot (\bar{b} \times \bar{a})$;

(ii) $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a}$;

(iii) $\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$.

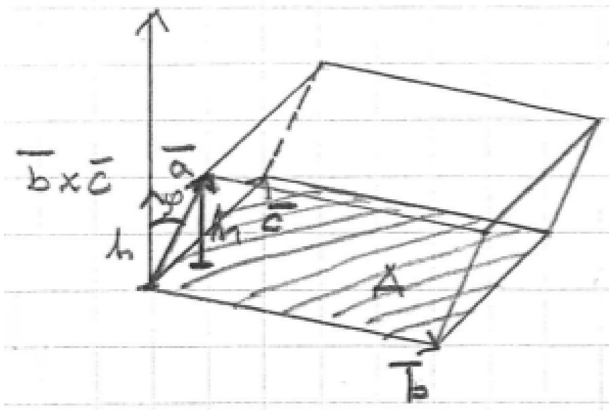
Todistus. (i) saadaan determinantin kehityssäännöistä, (ii) seuraa vektoreiden sisätulon vaihdannaisuudesta ja (iii) saadaan yhdistämällä (i) ja (ii). □

Huom.: $\overline{a} \cdot (\overline{a} \times \overline{b}) = 0 = \overline{b} \cdot (\overline{a} \times \overline{b})$.

Myös skalaarikolmitulolle saadaan geometrinen tulkinta: $||\overline{b} \times \overline{c}||$ on $\overline{b}$:n ja $\overline{c}$:n määräämän suunnikkaan ala. Särmiön tilavuus on korkeus · pohjan ala $= h \cdot A$:

$$|\cos\phi| ||\overline{a}|| \, ||\overline{b} \times \overline{c}|| = |\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})|,$$

missä $\phi = \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c})$.



Kuva 3.2: Skalaarikolmitulon geometrinen tulkinta.

Voimme myös muodostaa kolmen vektorin ristitulon, ns. *vektorikolmitulon* $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$ tai $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}$. Nyt sulkuja ei voida jättää pois, sillä vektoritulo ei ole liitännäinen (vrt. Lause 3.1.1 (i)):

Lause 3.2.2.

(i) $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a} \cdot \overline{c})\overline{b} - (\overline{a} \cdot \overline{b})\overline{c}$;

(ii) $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c} = (\overline{a} \cdot \overline{c})\overline{b} - (\overline{b} \cdot \overline{c})\overline{a}$;

Todistus. Todetaan suoralla laskulla. □

3.3 Divergenssi ja roottori

Usean muuttujan funktioiden differentiaali- ja integraalilaskennassa käytetään $\overline{f}$:n gradientin grad $\overline{f} = \nabla \overline{f}$ (∇ = nabla $= D_x\overline{i} + D_y\overline{j} + D_x\overline{k}$) ohella usein *divergenssiä ja roottoria (eli curlia)*. Olkoon $\overline{f} : A \to \mathbb{R}^3$, missä $A \subseteq \mathbb{R}^3$, differentioituva ja merk. $\overline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ (f_1, f_2 ja f_3 reaaliarvoisia). Tällöin funktion $\overline{f}$ *divergenssi* on reaaliarvoinen kuvaus $A \to \mathbb{R}$, joka määritellään seuraavasti:

$$\operatorname{div} \overline{f} = \nabla \cdot \overline{f} = D_x f_1 + D_y f_2 + D_z f_3.$$

Vastaavasti $\overline{f}$:n *roottori (eli curli)* on vektoriarvoinen kuvaus $A \to \mathbb{R}^3$, joka määr. seuraavasti:

$$\operatorname{rot} \overline{f} = \nabla \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = (D_y f_3 - D_z f_2)\overline{i} + (D_z f_1 - D_x f_3)\overline{j} + (D_x f_2 - D_y f_1)\overline{k}.$$

Esimerkki 3.3.1. $\overline{f}(x, y, z) = xy^2\overline{i} + 2y^2z\overline{j} - 2x\overline{k}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overline{f} &= \nabla \cdot \overline{f} = D_x(xy^2) + D_y(2y^2z) + D_z(-2x) = y^2 + 4yz; \\ \operatorname{rot} \overline{f} &= \nabla \times \overline{f} \\ &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ xy^2 & 2y^2z & -2x \end{vmatrix} \\ &= [D_y(-2x) - D_z(2y^2z)]\overline{i} + [D_z(xy^2) - D_x(-2x)]\overline{j} + [D_x(2y^2z) - D_y(xy^2)]\overline{k} \\ &= -2y^2\overline{i} + 2\overline{j} + 2xy\overline{k}. \end{aligned}$$

Lause 3.3.2. Olkoot $\overline{f}, \overline{h} : A \to \mathbb{R}^3$ ja $u : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$, differentioituvia sekä $a, b \in \mathbb{R}$ vakioita. Tällöin

(i) $\nabla \cdot (a\overline{g} + b\overline{h}) = a\nabla \cdot \overline{g} + b\nabla \cdot \overline{h}$;

(ii) $\nabla \times (a\overline{g} + b\overline{h}) = a\nabla \times \overline{g} + b\nabla \times \overline{h}$;

(iii) $\nabla \cdot (u\overline{g}) = \nabla u \cdot \overline{g} + u\nabla \cdot \overline{g}$;

(iv) $\nabla \times (u\overline{g}) = \nabla u \times \overline{g} + u\nabla \times \overline{g}$;

(v) $\nabla \cdot (\overline{g} \times \overline{h}) = \overline{h} \cdot (\nabla \times \overline{g}) = \overline{g} \cdot (\nabla \times \overline{h})$;

(vi) $\nabla \times (\overline{g} \times \overline{h}) = (\overline{h} \cdot \nabla)\overline{g} - \overline{h}(\nabla \cdot \overline{g}) - (\overline{g} \cdot \nabla)\overline{h} + \overline{g}(\nabla \cdot \overline{h})$;

(vii) $\nabla(\overline{g} \cdot \overline{h}) = (\overline{h} \cdot \nabla)\overline{g} + (\overline{g} \cdot \nabla)\overline{h} + \overline{h} \times (\nabla \times \overline{g}) + \overline{g} \times (\nabla \times \overline{h})$.

Todistus. Kaavat voidaan johtaa suoralla laskulla käyttämällä komponenttiesityksiä $\overline{g} = (g_1, g_2, g_3)$ ja $\overline{h} = (h_1, h_2, h_3)$ sekä annettuja määritelmiä. □

Lause 3.3.3. Olkoot $\overline{g} : A \to \mathbb{R}^3$ ja $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$, kahdesti jatkuvasti derivoituvia funktioita. Tällöin

(i) $\nabla \times (\nabla f) = \overline{0}$;

(ii) $\nabla \cdot (\nabla \times \overline{g}) = 0$;

(iii) $\nabla \times (\nabla \times g) = \nabla(\nabla \cdot \overline{g}) - \nabla^2\overline{g}$,

missä $\nabla^2\overline{g} = (\nabla \cdot \nabla)\overline{g} = (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\overline{g}$.

Todistus. Osoitetaan esim. kohta (i):

$$\nabla \times (\nabla f) = (D_y D_z f - D_z D_y f)\overline{i} + (D_z D_x f - D_x D_z f)\overline{j} + (D_x D_y - D_y D_x f)\overline{k} = 0,$$

koska 2. kertaluvun derivaatat ovat jatkuvia, jolloin derivointijärjestys voidaan Lauseen 1.3.3 nojalla vaihtaa. □

Huom.: Symbolia $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ kutsutaan *Laplacen operaattoriksi*. Yhtälöä $\nabla^2 \overline{f} = 0$ sanotaan *Laplacen yhtälöksi*, joka on siis osittaisdifferentiaaliyhtälö.

Esimerkki 3.3.4. Olkoon $\overline{f}(x, y, z) = xy\overline{i} + yz\overline{j} + zx^2\overline{k}$. Lasketaan $\nabla \times (\nabla \times \overline{f})$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overline{f}(x, y, z) &= y + z + x^2 \quad \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \overline{f}) = (2x, 1, 1); \\ \nabla^2 \overline{f}(x, y, z) &= (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\overline{f} = (0, 0, 2z), \end{aligned}$$

joten Lause 3.3.3 (iii):n nojalla

$$\nabla \times (\nabla \times \overline{f}(x, y, z)) = (2x, 1, 1 - 2z).$$

3.4 Potentiaali

Potentiaali on integraalifunktion vastine usean muuttujan funktioille. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\overline{u} : A \to \mathbb{R}^n$ vektorifunktio eli *vektorikenttä*. Jos on olemassa reaaliarvoinen kuvaus $f : A \to \mathbb{R}$ eli *skalaarikenttä*, jolle

$$\nabla f = \overline{u}$$

sanotaan, että f on $\overline{u}$:n *(skalaari)potentiaali*, ts. $\overline{u}$ on f:n gradientti. Jos $\overline{u}$:lla on potentiaali, se on vakiota vaille yksikäsitteisesti määrätty.

Esimerkki 3.4.1. Vektorikenttä $\overline{F} = -\frac{c}{||\overline{r}||^3}\overline{r}$, missä c on vakio, kuvaa kappaleiden välistä gravitaatiovetovoimaa etäisyydellä $||\overline{r}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Helposti todetaan, että $\overline{F} = \nabla(\frac{c}{||\overline{r}||})$, joten funktio $F(x, y, z) = \frac{c}{||\overline{r}||} = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ on $\overline{F}$:n potentiaali. Mainittakoon, että potentiaali f toteuttaa Laplacen yhtälön $\nabla^2 f = 0$, ts.

$$(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)f = 0.$$

Potentiaalin yhteys käyräintegraaliin on samankaltainen kuin integraalifunktion yhteys määrättyyn integraaliin. Oletamme jatkossa, että A on *alue* $\mathbb{R}^n$:ssä, ts. A on avoin ja *yhtenäinen* joukko, jolloin mielivaltaiset kaksi A:n pistettä voidaan yhdistää joukkoon A kuuluvalla kaarella.

Lause 3.4.2. Olkoon $\overline{u} : A \to \mathbb{R}^n$ jatkuva funktio ja f sen potentiaali. Jos r ja r_0 ovat alueen A pisteitä, niin

$$f(r) = f(r_0) + \int_C \overline{u} \cdot \mathrm{d}\overline{r},$$

missä $C \subseteq A$ on mielivaltainen paloittain säännöllinen käyrä pisteestä r_0 pisteeseen r.

Todistus. Olkoon $\overline{r}(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ C:n (paloittain) jatkuvasti derivoituva parametriesitys. Tällöin (vrt. Lause 2.1.1)

$$\int_C \overline{u} \cdot \mathrm{d}\overline{r} = \int_a^b \overline{u}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{\nabla f = \overline{u}} \int_a^b \nabla f(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{ketjusääntö}} \int_a^b (f \circ \overline{r})'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= f(\overline{r}(b)) - f(\overline{r}(a)) = f(r) - f(r_0). \quad \square$$

Lause 3.4.2 osoittaa erityisesti, että jos $\overline{u}$:lla on potentiaali, niin käyräintegraalin $\int_C \overline{u} \cdot \mathrm{d}\overline{r}$ arvo ei riipu lainkaan pisteitä r ja r_0 yhdistävän käyrän C valinnasta. Tämä ns. *käyräintegraalin riippumattomuus polun valinnasta* antaa itse asiassa kriteerin potentiaalin olemassaololle.

Lause 3.4.3. Olkoon $\overline{u} : A \to \mathbb{R}^n$ alueessa $A \subset \mathbb{R}^n$ jatkuva vektorifunktio. Tällöin $\overline{u}$:lla on potentiaali, jos ja vain jos kaikki sen käyräintegraalit $\int_C \overline{u} \cdot \mathrm{d}\overline{r}$ ovat riippumattomia polun valinnasta (ts. päätepisteitä yhdistävästä käyrän C valinnasta).

Todistus. Ehdon välttämättömyys saatiin Lauseen 3.4.2 seurauksena. Kääntäen oletetaan, että $\overline{u}$:n käyräintegraalit ovat riippumattomia polun valinnasta. Valitaan kiinteä piste $r_0 \in A$ ja määritellään funktio $f : A \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(r) := \int_C \overline{u} \cdot \mathrm{d}r,$$

missä C on jokin paloittain säännöllinen käyrä pisteestä r_0 pisteeseen r. Tällöin f on $\overline{u}$:n potentiaali, ts. $\nabla f = \overline{u}$. Perustellaan esimerkkinä yhtälö $D_x f = u_1$:

$$\frac{f(r + h\overline{i}) - f(r)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{r_0}^{r+h\overline{i}} \overline{u} \cdot \mathrm{d}r - \int_{r_0}^{r} \overline{u} \cdot \mathrm{d}r\right) = \frac{1}{h}\int_r^{r+h\overline{i}} \overline{u} \cdot \mathrm{d}r.$$

missä integrointi $r \to r + h\overline{i}$ suoritetaan pitkin yhdysjanaa $r(t) = r + t\overline{i}$, $t \in [0, h]$. Tällöin $r'(t) = \overline{i}$, joten

$$\frac{1}{h}\int_r^{r+h\overline{i}} \overline{u} \cdot \mathrm{d}r \underbrace{=}_{\text{Lause 2.1.1}} \frac{1}{h}\int_0^h u_1(r(t))\mathrm{d}t \underbrace{=}_{\text{väliarvolause}} u_1(r(t_1)),$$

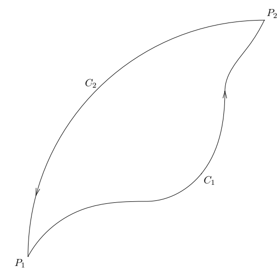
missä $0 < t_1 < h$. Kun $h \to 0$, $u_1(r(t_1)) \to u_1(r)$ u_1:n jatkuvuuden nojalla. Niinpä $\exists \frac{\partial f(r)}{\partial x} = u_1(r)$ $\forall r \in A$. $\square$

Potentiaalin olemassaolon toteaminen Lauseen 3.4.3 nojalla on hankalaa. Ehdon voi yhtäpitävästi muotoilla yli suljettujen käyrien otetuilla käyräintegraaleilla:

$\overline{u}$:lla on potentiaali $\iff$ $\oint_C \overline{u} \cdot \mathrm{d}r = 0$ kaikilla suljetuilla palottain säännöllisillä käyrillä C.

Perustelu: Olkoon $C = C_1 \cup C_2$ kuten alla olevassa kuvassa.

$$\int_C \overline{u}\cdot\mathrm{d}r = \int_{C_1} \overline{u}\cdot\mathrm{d}r + \int_{C_2} \overline{u}\cdot\mathrm{d}r = \int_{C_1} \overline{u}\cdot\mathrm{d}r - \int_{-C_2} \overline{u}\cdot\mathrm{d}r \underbrace{=}_{\text{Lauseen 3.4.3 ehto voimassa}} \int_{C_1} \overline{u}\cdot\mathrm{d}r - \int_{C_1} \overline{u}\cdot\mathrm{d}r = 0.$$



Kuva 3.3: Potentiaalin olemassaolo: käyräintegraali häviää yli suljettujen käyrien.

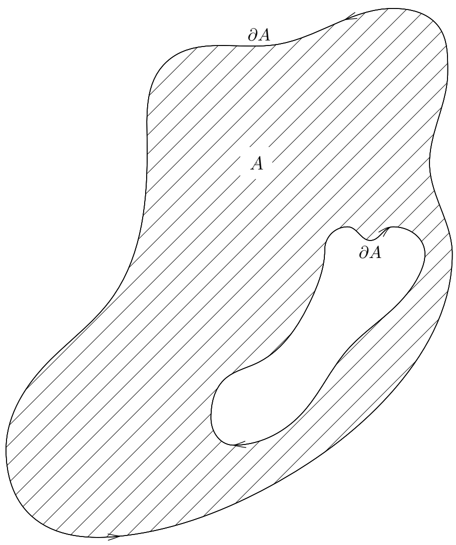
Jos $\overline{u}$ itse on jatkuvasti derivoituva, saadaan Lauseen 3.3.3 (i) seuraava välttämätön ehto potentiaalin olemassa ololle: $\overline{u} = \nabla f \;\Rightarrow\; \nabla \times \overline{u} = \overline{0}$. Siis $\overline{u}$:n roottori $\nabla \times \overline{u} = \overline{0}$ eli yhtäpitävästi

$$D_i u_j = D_j u_i, \quad \forall i, j.$$

Tälläista vektorikenttää sanotaan *pyörteettömäksi*. Osoittautuu, että vektorikentän pyörteettömyys on myös riittäävä ehto potentiaalin olemassaololle. Tämä seuraa Stokesin lauseesta, joka esitetään jatkossa. Ehdon $\nabla \times \overline{u} = \overline{0}$ toteaminen on käyttökelpoinen tapa tarkistaa potentiaalin olemassaolo.

3.5 Greenin lause

Greenin lause liittää toisiinsa tasoalueen $A \subset \mathbb{R}^2$ yli otetun pintaintegraalin ja A:n reunaa ∂A pitkin otetun käyräintegraalin.



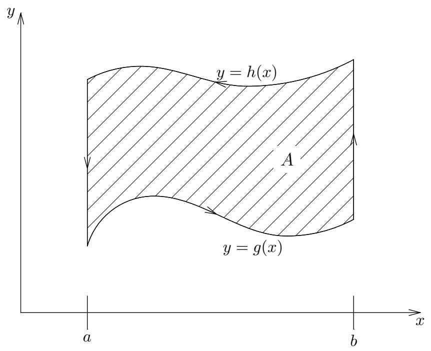
Kuva 3.4: Reunakärien positiivinen suunnistus.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ suljettu rajoitettu alue, jonka reuna ∂A koostuu äärellisestä määrästä kaaria, joiden pituus on äärellinen. *Suunnistetaan reunakäyrät positiivisesti*, ts. niin, että alue A jää vasemmalle tähän suuntaan kuljettaessa.

Lause 3.5.1. (Greenin lause) Olkoon A kuten yllä ja ∂A positiivisesti suunnistettu ja olkoon $\overline{u} : A \to \mathbb{R}^2$ jatkuvasti derivoituva. Tällöin

$$\iint_A \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial A} \overline{u} \cdot \mathrm{d}r.$$

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, missä $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ ovat jatkuvia; oheisessa kuvassa $y_1(x) = g(x)$ ja $y_2(x) = h(x)$.



Kuva 3.5: Greenin lauseen todistuksessa esiintyvät reunakäyrät.

Lauseen 2.2.2 nojalla

$$\iint_A \frac{\partial u_1}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial u_1}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b [u_1(x, y_2(x)) - u_1(x, y_1(x))]\, \mathrm{d}x.$$

Toisaalta (vrt. Lause 2.1.1) käyräintegraali yli ∂A:n antaa

$$\int_{\partial A} u_1 \,\mathrm{d}x = \int_a^b u_1(x, y_1(x))\, \mathrm{d}x + 0 + \int_b^a u_1(x, y_2(x))\, \mathrm{d}x + 0 = \int_a^b [u_1(x, y_1(x)) - u_1(x, y_2(x))]\, \mathrm{d}x.$$

Siis

$$\iint_A \frac{\partial u_1}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{\partial A} u_1 \,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

Sama yhtälö yleisemmälle alueelle A saadaan kun se jaetaan sopivilla jakokäyrillä osiin A_i joiden reunakäyrät ovat yo. tyyppiä. Kun tasointegraalit ja käyräintegraalit yli osien $A_1, \ldots, A_n$ lasketaan yhteen, supistuvat ylimääräisiä jakokäyriä vastaavat käyräintegraalit pois, sillä ne kuljetaan kahteen kertaan vastakkaisissa suunnissa ja jäljelle käyräintegraaliin jää vain alkuperäistä reunaa ∂A vastaava osa, ts. $\sum_{i=1} \int_{\partial A_i} u_1 \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\left(\cup_{i=1}^n A_1\right)} u_1 \,\mathrm{d}x$.

Tapauksessa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$ saadaan

$$\iint_A \frac{\partial u_2}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d [u_2(x_2(y), y) - u_2(x_1(y), y)]\, \mathrm{d}y,$$
$$\int_{\partial A} u_2 \,\mathrm{d}y = \int_c^d [u_2(x_2(y), y) - u_2(x_1(y), y)]\, \mathrm{d}y,$$

jolloin

$$\iint_A \frac{\partial u_2}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial A} u_2\,\mathrm{d}y. \tag{3.2}$$

Jälleen osittamalla A sopivasti nähdään, että tämä yhtälö pätee alkuperäisessä yleisemmässä alueessa A. Yhdistämällä kaavat (3.1) ja (3.2) saadaan

$$\iint_A \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial A} u_2\,\mathrm{d}y + \int_{\partial A} u_1\,\mathrm{d}x = \int_{\partial A} \overline{u}\cdot\mathrm{d}r. \qquad \square$$

Seuraus 3.5.2. (Pinta-alan laskeminen Greenin kaavalla).

$$\text{Ala} = \iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\partial A}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

Todistus. Valitaan $\overline{u}(x,y) = -y\overline{i} + x\overline{j}$. Greenin kaava antaa

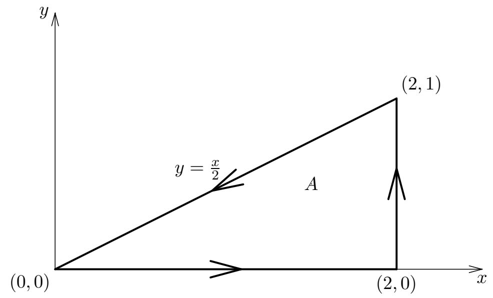
$$\iint_A \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A (1-(-1))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\int_{\partial A}\overline{u}\cdot\mathrm{d}r = \int_{\partial A}(u_1\,\mathrm{d}x + u_2\,\mathrm{d}y) = \int_{\partial A}(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y). \qquad \square$$

Esimerkki 3.5.3. Ellipsin $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pinta-ala. Parametriesitys: $x = a\cos t$ ja $y = b\sin t$.

$$\begin{aligned}\iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_{\partial A}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x(t)y'(t)\mathrm{d}t - y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(b\cos t) - (b\sin t)(-a\sin t)]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,\mathrm{d}t = \pi ab.\end{aligned}$$

Esimerkki 3.5.4. $\overline{u} = (2x+y^2)\overline{i} + (3y-4x)\overline{j}$. Lasketaan käyräintegraali $\int_C \overline{u}\cdot\mathrm{d}r$, kun C on kuvan mukainen käyrä.

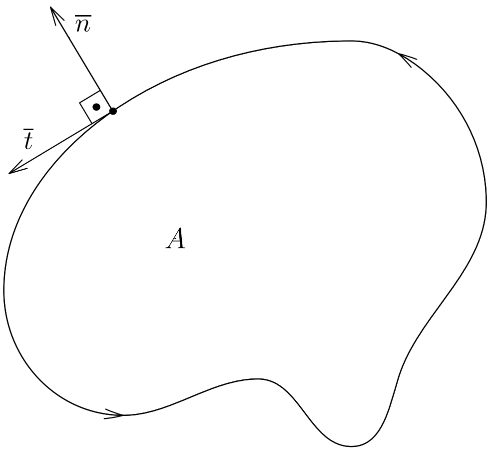


Kuva 3.6: Paloittain säännöllinen integrointikäyrä.

Greenin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} u\cdot\mathrm{d}r &= \iint_A \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x}(3y-4x) - \frac{\partial}{\partial y}(2x+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_A (-4-2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2\left(\int_0^{x/2}(-4-2y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^2\left(-2x - \frac{1}{4}x^2\right)\mathrm{d}x = -\frac{14}{3}.\end{aligned}$$

Gaussin divergenssilause tasossa: Jos $\bar{t} = x\bar{i} + y\bar{j}$ on A:n reunapisteen yksikkötangenttivektori ($||\bar{t}|| = 1$), niin vastaava *yksikköulkonormaalivektori* on $\bar{n} = y\bar{i} - x\bar{j}$.



Kuva 3.7: Yksikköulkonormaalivektori.

Lause 3.5.5. (Divergenssilause tasossa) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ ja ∂A kuten edellä ja olkoon $\bar{n}$ ∂A:n yksikköulkonormaalivektori sekä $\bar{u} : A \to \mathbb{R}^2$ jatkuvasti derivoituva. Tällöin

$$\iint_A \nabla \cdot \bar{u} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial A} \bar{u} \cdot \bar{n} \underbrace{\mathrm{d}s.}_{\text{kaarenpituus}}$$

Todistus. Olkoon $\bar{r} = \bar{r}(t)$ reunan ∂A parametrointi ja olkoon $S = s(t) = \int_a^t ||\bar{r}'(\eta)|| \,\mathrm{d}\eta$ kaarenpituus. Tällöin

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = ||\bar{r}'(t)||, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{||\bar{r}'(t)||}$$

ja edelleen

$$\bar{r}'(s) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\bar{r}'(t)}{||\bar{r}'(t)||} = \frac{x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j}}{||x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j}||}.$$

Siis derivoimalla $\bar{r} = (x, y)$ kaarenpituuden s suhteen saadaan yksikkötangenttivektori: $r'(s) = x'(s)\bar{i} + y'(s)\bar{j}$. Yksikköulkonormaalivektori on sitten $\bar{n} = y'(s)\bar{i} - x'(s)\bar{j}$.

Greenin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\iint \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\partial A} (u_1 \,\mathrm{d}y - u_2 \,\mathrm{d}x) = \int_0^L \big(u_1(\bar{r}(s))y'(s) - u_2(\bar{r}(s))x'(s)\big) \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^L \bar{u}(\bar{r}(s)) \cdot \bar{n}(\bar{r}(s)) \,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

missä L on kaaren kokonaispituus, eli

$$\iint_A \nabla \cdot \bar{u} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial A} \bar{u} \cdot \bar{n} \,\mathrm{d}s.$$

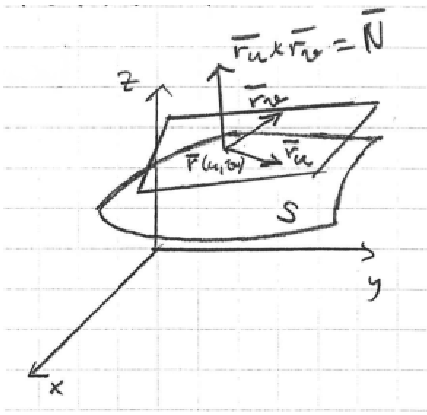
□

3.6 Pintaintegraali

Yleistämme funktion tasoalueen yli otetun integraalin pintaintegraaliksi, jossa integrointi suoritetaan $\mathbb{R}^3$:ssa olevan 2-ulotteisen pinnan yli (vrt. määrätyn integraalin yleistäminen käyräintegraaliksi yhden muuttujan tapauksessa). Olkoon säännöllisen pinnan $S \subset \mathbb{R}^3$ parametriesityksenä

$$\overline{r}(u,v) = x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k},$$

missä $(u,v) \in R$, R on tasoalue $\mathbb{R}^2$:ssa ja $r : R \to \mathbb{R}^3$, $r(R) = S$.



Kuva 3.8: Tangenttitason normaalivektori ja yksikkötangenttivektorit.

Pinnan S pisteessä $\overline{r}(u,v)$ olevan tangenttitason määrää tangenttivektorit:

$$\overline{r}_u = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\overline{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\overline{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\overline{k};$$
$$\overline{r}_v = \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\overline{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\overline{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\overline{k},$$

kun $\overline{r}_u \nparallel \overline{r}_v$. Tangenttitason normaali- ja yksikkönormaalivektorit ovat

$$\overline{N} = \overline{r}_u \times \overline{r}_v \quad \text{ja} \quad \overline{n} = \frac{\overline{N}}{||\overline{N}||}.$$

Pinnalla S määritellyn skalaarifunktion $g : S \to \mathbb{R}$ *pintaintegraali yli pinnan* S määritellään seuraavasti:

$$\iint_S g(\overline{r})\,\mathrm{d}A = \iint_R g(\overline{r}(u,v))||\overline{N}(u,v)||\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Kaavan taustalla on seuraava ajatus: Pinnalla S olevan pinta-alkion "pinta-ala" $\mathrm{d}A = ||\overline{N}(u,v)||$ $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, missä $\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \mathrm{d}a$ on uv-tasossa olevan pienen suorakulmion $\mathrm{d}a$ pinta-ala. Kuvauksessa $\overline{r}$ $\mathrm{d}a$:ta vastaa pinta-alkio $\mathrm{d}A$, jonka pinta-alla $\approx \mathrm{d}a\cdot$ tangenttitasossa vektorien $\overline{r}_u$ ja $\overline{r}_v$ määräämän suunnikkaan pinta-ala $= ||\overline{r}_u \times \overline{r}_v||$.

Tarkastellaan tapausta, jossa pinta S on funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kuvaajan määräämä: $S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R\} = \overline{r}(R)$, $\overline{r}(x, y) = x\overline{i} + y\overline{j} + f(x, y)\overline{k}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\overline{r}_x &= \overline{i} + f_x\overline{k};\\
\overline{r}_y &= \overline{j} + f_y\overline{k};\\
\overline{N} = \overline{r}_x \times \overline{r}_y &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{j} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\overline{i} - f_y\overline{j} + \overline{k},
\end{aligned}$$

ja $||\overline{N}|| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$. Siten

$$\iint_S g(\overline{r})\,\mathrm{d}A = \iint_R g(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

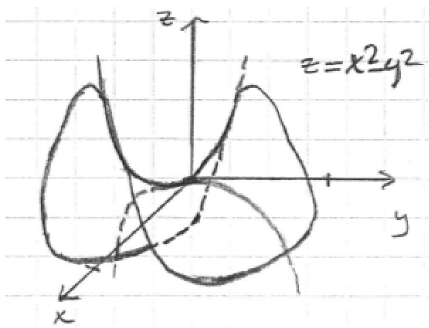
Kun $g(\overline{r}) \equiv 1$, pintaintegraali antaa pinnan S pinta-alan:

$$A(S) = \iint_R ||\overline{N}(u, v)||\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Erityisesti tyyppiä $z = f(x, y)$ olevalle pinnalle:

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Esimerkki 3.6.1. Lasketaan satulapinnan $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 2$, pinta-ala.



Kuva 3.9: Satulapinta.

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2\leq 2} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underbrace{=}_{\text{napakoord.}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\;\underbrace{r}_{=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}\right|}\;\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = 2\pi\Big|_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2} = \frac{13\pi}{3}.$$

Vektorifunktiolle $\overline{g} : S \to \mathbb{R}^3$ pintaintegraali voidaan määritellä komponenteittain:

$$\iint_S \overline{g}(\overline{r})\,\mathrm{d}A = \left(\iint_S g_1(\overline{r})\mathrm{d}A, \iint_S g_2(\overline{r})\,\mathrm{d}A, \iint_S g_3(\overline{r})\,\mathrm{d}A \right).$$

Useissa sovelluksissa vektorifunktion $\overline{g}$ pintaintegraali lasketaan pinnan yksikkönormaalin $\overline{n} = \overline{N}/||\overline{N}||$ suunnassa:

$$\iint_S \overline{g} \cdot \overline{n}\ \mathrm{d}A = \iint_R \overline{g}(\overline{r}(u,v)) \cdot \overline{N}(u,v)\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Integraalia $\iint_S \overline{g} \cdot n\,\mathrm{d}A$ kutsutaan *vektorikentän $\overline{g}$ vuoksi pinnan S läpi.* Integroitava funktio $\overline{g} \cdot \overline{n}$ ilmoittaa vektorista $\overline{g}$ pinnan läpi kohtisuoraan suuntautuvan osuuden.

Esimerkki 3.6.2. Lasketaan veden kokonaisvirtaus parabolisen sylinterin $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$ läpi, kun virtanopeus pisteessä (x, y, z) on $\overline{g} = y\overline{i} + 2\overline{j} + xz\overline{k}$ (m/s).

Parametriesitys ko. pinnalle: $\overline{r}(u, v) = u\overline{i} + u^2\overline{j} + v\overline{k}$, $0 \leq u \leq 2$ ja $0 \leq v \leq 3$. Nyt $\overline{r}_u = \overline{i} + 2u\overline{j}$, $\overline{r}_v = \overline{k}$ ja

$$\overline{N} = \overline{r}_u \times \overline{r}_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2u\overline{i} - \overline{j}.$$

Edelleen $\overline{g}(\overline{r}(u, v)) = u^2\overline{i} + 2\overline{j} + uv\overline{k}$ ja $\overline{g}(\overline{r}(u, v)) \cdot \overline{N} = 2u^3 - 2$, joten

$$\iint_S \overline{g} \cdot n\,\mathrm{d}A = \int_0^3 \int_0^2 (2u^3 - 2)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 12(\mathrm{m}^3/\mathrm{s}).$$

3.7 Stokesin lause

Stokesin lause yleistää Greenin lauseen tasoalueelta 2-ulotteiselle pinnalle $S \subset \mathbb{R}^3$. Pintaintegraali yli pinnan S liitetään tällöin pinnan S reunaa ∂S pitkin otettuun käyräintegraaliin. Greenin kaava (Lause 3.5.1) voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa:

$$\iint_R (\nabla \times \overline{u}) \cdot \overline{k}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial R} \overline{u} \cdot \mathrm{d}r,$$

sillä $(\nabla \times \overline{u}) \cdot \overline{k} = D_x u_2 - D_y u_1$. Tässä muodossa kaava yleistyy tasoalueelta R pinnalle S. Huomaa, että $\overline{k} \perp xy$-tasoa vastaan.

Lause 3.7.1. (Stokesin lause) Olkoon S suljettu säännöllinen pinta-alue ja ∂S positiivisesti suunnistettu sekä $\overline{n}$ pinnan S yksikkönormaali. Tällöin jatkuvasti derivoituvalle $\overline{u} : S \to \mathbb{R}^3$ pätee

$$\iint_S (\nabla \times \overline{u}) \cdot \overline{n}\ \mathrm{d}A = \int_{\partial S} \overline{u} \cdot \mathrm{d}r.$$

Todistus. Palautetaan Greenin lauseeseen parametriesityksen $\overline{r} : R \to S$ välityksellä; yksityiskohdat sivuutetaan. □

Esimerkki 3.7.2. Olkoon $\overline{u}(x, y, z) = (2y, -2x, z^2x)$. Lasketaan $\iint_S (\nabla \times \overline{u}) \cdot \overline{n}\,\mathrm{d}A$ kun pintana on $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$. Nyt $\partial S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Stokesin kaava ja napakoordinaatit:

$$\int_{\partial S} \overline{u} \cdot \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \overline{u}(\overline{r}(\phi)) \cdot \overline{r}'(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} (2\sin\phi, -2\cos\phi, 0) \cdot (-\sin\phi, \cos\phi, 0)\,\mathrm{d}\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin^2\phi - 2\cos^2\phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} -2\,\mathrm{d}\phi = -4\pi.$$

Huom. (vrt. s. 35): Jos $\operatorname{rot}\overline{u} = \nabla \times \overline{u} = 0$, Stokesin lause antaa:

$$\int_{\partial S} \overline{u} \cdot \mathrm{d}r = \iint_S (\nabla \times \overline{u}) \cdot \overline{n}\ \mathrm{d}A = 0.$$

Tässä ∂S voi olla mielivaltianen pinta-alueen $S \subset \mathbb{R}^3$ suljettu paloittain säännöllinen kaari, joten $\nabla \times \overline{u} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{u}$:lla on potentiaali. Siis: Jatkuvasti derivoituva vektorikenttä $\overline{u}$ on pyörteetön jos ja vain jos $\overline{u}$:lla on potentiaali.

3.8 Gaussin divergenssilause

Divergenssilause (Lause 3.5.5) voidaan yleistää 3-komponenttiselle vektorifunktiolle $\overline{u} : V \to \mathbb{R}^3$, missä $V \subset \mathbb{R}^3$ on säännöllinen kappale $\mathbb{R}^3$:ssa. Tällöin V:n yli otettu avaruusintegraali liitetään V:tä rajoittavan reunapinnan ∂V yli otettuun pintaintegraaliin.

Olkoon $V \subset \mathbb{R}^3$ *umpinaisen säännöllisen pinnan* $S = \partial V$ rajaama kappale (pinnan S parametriesitys $\overline{r} : R \to \mathbb{R}^3$ on paloittain kahdesti jatkuvasti derivoituva) ja olkoon $\overline{n}$ V:n reunapinnan ulospäin osoittava yksikkönormaali.

Lause 3.8.1. (Divergenssilause) Olkoot $V \subset \mathbb{R}^3$, ∂V ja $\overline{n}$ kuten yllä sekä $\overline{u} : V \to \mathbb{R}^3$ jatkuvasti derivoituva. Tällöin

$$\iiint_V \nabla \cdot \overline{u}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\partial V} \overline{u} \cdot \overline{n}\ \mathrm{d}A.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Esimerkki 3.8.2. Lasketaan vektorikentän $\overline{u} = 4xz\overline{i} - y^2\overline{j} + yz\overline{k}$ vuo kuution $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$ pinnan läpi.

$$\iint_{\partial V} \overline{u} \cdot \overline{n}\ \mathrm{d}A \underbrace{=}_{\text{Lause 3.8.1}} \iiint_V \nabla \cdot \overline{u}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V (D_x u_1 + D_y u_2 + D_z u_3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_V (4z - 2y + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (4z - y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 (4z - y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(4z - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}z = \frac{3}{2}.$$

Vektorikenttää $\overline{F}$ sanotaan vektorifunktion $\overline{u}$ *vektoripotentiaaliksi*, jos $\overline{u} = \nabla \times \overline{F} = \operatorname{rot}\overline{F}$. Jos $\overline{u}$:lla on vektoripotentiaali, niin Lauseen 3.3.3 kohdan (ii) mukaan

$$\operatorname{div}(\overline{u}) = \nabla \cdot \overline{u} = \nabla \cdot (\nabla \times \overline{F}) = 0.$$

Vektorikenttää $\overline{u}$ sanotaan *lähteettömäksi*, jos $\nabla \cdot \overline{u} = 0$. Vektorikentän lähteettömyys on siten välttämätön ehto vektoripotentiaalin olemassaololle. Myös käänteinen pätee: jos u on lähteetön, niin sillä on vektoripotentiaali. Siis: Jatkuvasti derivoituva vektorikenttä $\overline{u}$ on lähteetön jos ja vain jos $\exists \overline{F}$ s.e. $\overline{u} = \nabla \times \overline{F}$.

Asiaa voi perustella/havainnollistaa Gaussin divergenssilauseen avulla: Kun $\nabla \cdot \overline{u} = 0$, niin $\overline{u}$:n *vuo mielivaltaisen umpinaisen pinnan* $\widetilde{S} \subset V$ *läpi on nolla:*

$$\iint_{\widetilde{S}} \overline{u} \cdot \overline{n} \, \mathrm{d}A = \iiint_{V(\widetilde{S})} \nabla \cdot \overline{u} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

ts. "kokonaisvirtaus $\widetilde{S}$:n läpi on nolla" $\Longleftrightarrow$ V:ssä ei lähteitä eikä nieluja.

Kirjallisuutta

[1] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 10th ed., Wiley, New York, 2011.

[2] A. Lahtinen ja E. Pehkonen, *Matematiikkaa soveltajille 2*, 1.-3. painos, Tammer-Paino Oy, Tampere, 1999.