

Algebra I (2009)

Harjoitus 2/viikko 46

- (1) Muodosta luvun 3127 (kanoninen) alkutekijähajotelma.
- (2) Kuinka moneen nollaan päättyy kertoma $1000!$?
- (3) Mikä on luvun $3^{331576} + 19$ viimeinen numero kymmenjärjestelmässä?
- (4) Olkoot $a, t \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, t > 0$. Todista:

$$\text{syt}\left(\frac{a^t-1}{a-1}, a-1\right) = \text{syt}(t, a-1).$$

- (5) Olkoon $n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Todista:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}.$$

- (6) Olkoon p alkuluku.

- (a) Todista:

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p} \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

- (b) Todista *Fermat'n pieni lause*:

$$a^p \equiv a \pmod{p} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

Vihje: Käytä toistuvasti (a)-kohtaa pareihin $(x, y) = (a-1, 1), \dots, (a-a, 1)$

- (7) Laske jakojäännös $2^{11213} - 1 \pmod{13}$. (Vihje: Fermat'n pieni lause.)