

Algebra I (2009)

Harjoitus 3/viikko 47

1. Etsi jaollisuussääntö sille, milloinka annettu kokonaisluku on jaollinen luvulla
 - (a) 11
 - (b) 25

2. Ratkaise kongruenssi $104x \equiv 56 \pmod{132}$ käyttäen Eukleideen algoritmia.

3. Todista Wilsonin lause:

$$\text{jos } p \text{ on alkuluku, niin } (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

(Vihje: Tarkastele kongruenssin $ax \equiv 1 \pmod{p}$ ratkeavuutta.)

4. Osoita, että p on tekijänä luvun $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$ osoittajassa, jos p on alkuluku.
5. Osoita, että on olemassa äärettömän monta muotoa $p = 6t - 1$ ($t \in \mathbb{Z}$) olevaa alkulukua p .
6. Pikkutyttö jakoi lasihelmet kolmeen yhtäsuureen kasaan jolloin yksi jäi yli, sitten viiteen osaan jolloin kaksi jäi yli, ja lopuksi seitsemään osaan jolloin kolme jäi yli. Montako helmiä oli kaikkiaan, kun tiedetään että niitä oli vähintään sata mutta korkeintaan kaksisataa?
7. Olkoot $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$. Todista:

(a) $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \dots \cup \overline{m-1}$.

(b) $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$.

(c) $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$.