DISKREETTI MATEMATIIKKA

Sisällysluettelo

1. Relaatio ja funktio

1.1. Karteesinen tulo.

Sellaista kahden alkion a, b joukkoa, jossa alkioiden järjestys on määrätty sanotaan *järjestetyksi pariksi*. Merkitään (a, b). Järjestettyjen parien yhtäsuuruus siis määritellään näin:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d).$$

Yleisesti, jos alkiot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ muodostavat joukon jossa alkioiden järjestys on määrätty, sanotaan tällaista joukkoa *järjestetyksi n-jonoksi*, merkitään $(a_1, \ldots, a_n)$.

Määritelmä 1.1. Joukkojen $A_1, \ldots, A_n$ karteesinen tulo

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Sopimus: Merkitsemme karteesista tuloa $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ kertaa}} = A^n$

Esimerkki 1.1. Olkoot $A = \{x\}$, $B = \{1, 2\}$. Nyt $A \times B = \{(x, 1), (x, 2)\}$ ja $B \times A = \{(1, x), (2, x)\}$. Täten $A \times B \neq B \times A$.

Esimerkki 1.2. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

1.2. Relaatio ja funktio.

Määritelmä 1.2. *Binäärinen relaatio joukosta A joukkoon B* on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko R. Jos $A = B$ sanotaan, että R on *relaatio joukossa A*.

Esimerkki 1.3. Olkoon $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ja $B = \{2, 4, 6\}$. Relaatio $R = \{(x, y) \mid x + y = 9\}$ A:sta B:hen muodostuu järjestetyistä pareista $(3, 6), (5, 4), (7, 2)$. Siis $R = \{(3, 6), (5, 4), (7, 2)\}$.

Esimerkki 1.4. Relaatio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ joukossa $\mathbb{R}^2$ koostuu kaikista reaalisen yksikköympyrän pisteistä.

Sopimus: Merkitään lyhyesti aRb jos $(a, b) \in R$.

Määritelmä 1.3. Olkoon R relaatio joukosta A joukkoon B. Relaation R *käänteisrelaatio* on relaatio

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Olkooon lisäksi S relaatio joukosta B joukkoon C. Relaatioiden R ja S *yhdistetty relaatio* on relaatio

$$S \circ R = \{(a,c) \mid (a \in A, c \in C) \wedge \big((aRb) \wedge (bSc) \text{ jollakin } b \in B\big)\},$$

joukosta A joukkoon C.

Huomautus 1.1. $S \circ R$ muodostetaan siis seuraavasti: valitaan jokaista relaation R paria (a,b) kohti kaikki relaation S muotoa (b,c) olevat parit. Nyt $S \circ R$ on kaikkien tällaisten parien (a,c) muodostama joukko.

Esimerkki 1.5. Olkoot A, B ja $R = \{(3,6),(5,4),(7,2)\}$ kuten esimerkissä 1.3. Olkoon $C = \{a,b,c\}$ ja $S = \{(2,a),(2,b),(6,c)\}$ relaatio B:stä C:hen. Nyt $S^{-1} = \{(a,2),(b,2),(c,6)\}$ ja $S \circ R = \{(3,c),(7,a),(7,b)\}$.

Esimerkki 1.6. Relaation $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ käänteisrelaatio on A itse. Olkoon $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$. Nyt $B \circ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1, x \geq 0\}$.

Määritelmä 1.4. *Funktio (tai kuvaus) f joukolta A joukkoon B* on sellainen relaatio joukosta A joukkoon B, jossa jokainen joukon A alkio on relaatiossa täsmälleen yhden joukon B alkion kanssa. Merkitään $f : A \to B$. Jos $(x,y) \in f$, niin merkitään $y = f(x)$.

Esimerkki 1.7. Relaatio $\{(1,1),(2,1),(3,1)\}$ joukossa $A := \{1,2,3\}$ on funktio joukolta A joukkoon A. Relaatiot $\{(1,1),(2,2)\}$ ja $\{(1,1),(2,2),(2,3)\}$ eivät ole funktioita joukolta A joukkoon A.

Esimerkki 1.8. Relaatio $\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y = x^2\}$ joukossa $\mathbb{R}^2$ on funktio. Relaatio $\{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}, x = y^2\}$ ei ole funktio, sillä esim. $(1,1)$ ja $(1,-1)$ kuuluvat siihen.

Kertauksena funktioihin liittyvää terminologiaa:

Määritelmä 1.5. Olkoon $f : A \to B$. $f(a)$ on alkion *a kuva kuvauksessa f* (tai f:n arvo pisteessä a). A on funktion f *määrittelyjoukko* ja B on funktion f *maalijoukko.* Joukko

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

on funktion f *kuvajoukko* (tai arvojoukko). Sitä merkitään myös symbolilla $Im\, f$.

Määritelmä 1.6. Olkoot $f : A \to B$ ja $A' \subseteq A, B' \subseteq B$. *Joukon A' kuva* (kuvauksessa f) on joukko

$$f(A') := \{f(a) \mid a \in A'\}.$$

Joukon B' alkukuva (kuvauksessa f) on joukko

$$f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$$

Huomautus 1.2. Yhden alkion joukon $\{b\}$ alkukuvaa merkitään tavallisesti symbolilla $f^{-1}(b)$, ja kutakin joukon $f^{-1}(b)$ alkiota sanotaan alkion b alkukuvaksi (kuvauksessa f).

Esimerkki 1.9. Tarkastellaan funktiota $g = \{(a, 1), (b, 1), (c, 3)\}$ joukolta $A = \{a, b, c\}$ joukkoon $B = \{1, 2, 3\}$. Nyt a:n kuva $g(a) = 1$, g:n kuvajoukko $g(A) = \{1, 3\}$, joukon $\{1, 2\}$ alkukuva $g^{-1}(\{1, 2\}) = \{a, b\}$, alkion 1 alkukuvat ovat a ja b ja $g^{-1}(1) = \{a, b\}$ ja alkion 2 alkukuvien joukko $g^{-1}(2) = \emptyset$.

Määritelmä 1.7. Funktio $f : A \to B$ on *injektio*, jos jokaisella joukon B alkiolla on korkeintaan yksi alkukuva kuvauksessa f. Se on *surjektio*, jos jokaisella joukon B alkiolla on vähintään yksi alkukuva. Se on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio ts. jokaisella joukon B alkiolla on täsmälleen yksi alkukuva.

Esimerkki 1.10. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 2$. Olkoon $y \in \mathbb{R}$. Yhtälöllä $y = 4x + 3$ on täsmälleen yksi ratkaisu, nimittäin $x = (y - 3)/4$. Täten f on bijektio.

Lause 1.1. *Olkoon $f : A \to B$. Funktio f on injektio jos ja vain jos kaikille joukon A alkioille a, a' pätee $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.*

Todistus. Oletetaan, että f on injektio. Oletetaan, että joillakin $a, a' \in A$ väitteen implikaatio ei päde. Silloin $f(a) = f(a')$ ja $a \neq a'$. Nyt alkiolla $f(a)$ on kaksi alkukuvaa, mikä on vastoin injektiivisyyden määritelmää. Siispä implikaatio on tosi.

Oletetaan, että väitteen implikaatio pätee. Tällöin pätee myös sen kontrapositio $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$. Täten jokaisella joukon B alkiolla on korkeintaan yksi alkukuva. $\square$

Esimerkki 1.11. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$. Osoitetaan, että f on injektio. Oletetaan, että $f(a) = f(b)$. Nyt

$$\begin{aligned}
&a^3 + a + 1 = b^3 + b + 1 && \Leftrightarrow \\
&a^3 - b^3 = b - a && \Leftrightarrow \\
&(a - b)(a^2 + ab + b^2) = b - a && \Leftrightarrow \\
&(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0.
\end{aligned}$$

Täten $a - b = 0$ tai $a^2 + ab + b^2 + 1 = 0$. Näistä jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisua a sillä, sillä sen diskriminantti a:n suhteen $= -3b^2 - 4 < 0$. Täten $a = b$ ja f on injektio. Funktio f on myös surjektio, sillä jos $a \in \mathbb{R}$, niin $f(x) - a < 0$ riittävän pienellä x:n arvolla ja $f(x) - a > 0$ riittävän suurella x:n arvolla, ja koska f on jatkuva, niin $f(x_0) = a$ jollakin $x_0 \in \mathbb{R}$. Siispä f on bijektio.

Seuraavaksi annetaan funktioiden yhdistämiseen perustuvat riitävät ehdot surjektiivisuuden ja injektiivisyyden toteamiseksi. Funktioiden yhdistäminen tapahtuu seuraavasti: olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$. Silloin $g \circ f$ on funktio $A \to C, (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Tämä seuraa suoraan yhdistetyn relaation määritelmästä.

Lause 1.2. *Olkoot $f : A \to B$, $g : B \to A$ funktioita. Silloin pätevät*

(1) *Jos $g \circ f = id_A$ niin f on injektio,*
(2) *Jos $f \circ g = id_B$ niin f on surjektio,*

missä id_A on A:n identiteettifunktio $A \to A, id_A(x) = x$ ja id_B on B:n identiteettifunktio.

Todistus. (1) $f(a) = f(a') \Rightarrow g(f(a)) = g(f(a')) \overset{g \circ f = id_A}{\Rightarrow} a = a'$.
(2) Olkoon $b \in B$. Nyt $f(a) = b$, kun valitaan $a = g(b)$, sillä $f \circ g = id_B$. $\square$

Esimerkki 1.12. Olkoot f ja g funktioita $\mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$f(n) = n + 1,$$
$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{jos } n = 0, \\ n - 1 & \text{jos } n \geq 1. \end{cases}$$

Nyt $g(f(n)) = g(n + 1) = n$, sillä $n + 1 \geq 1$. Näin ollen $g \circ f = id_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ja siispä f on injektio ja g on surjektio.

Määritelmä 1.8. Olkoon $f : A \to B$. Jos käänteisrelaatio f^{-1} joukosta B joukkoon A on funktio on se f:n *käänteisfunktio.*

Lause 1.3. *Funktiolla f on käänteisfunktio silloin ja vain silloin kun f on bijektio.*

Todistus. Olkoon $f = \{(a,b) \mid (a \in A) \wedge (b = f(a))\}$ ja $f^{-1} = \{(b,a) \mid (a \in A) \wedge (b = f(a))\}$. Nyt f^{-1} on funktio joss jokaista $b \in B$ vastaa täsmälleen yksi $a \in A$ jolle $f(a) = b$ joss f on bijektio. □

Esimerkki 1.13. Esimerkin 1.10 käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = (x - 3)/4$. Esimerkin 1.11 funktiolla on käänteisfunktio f^{-1}, mutta sen laskeminen on hankalanpaa. Seuraavaan lauseeseen perustuen voidaan kuitenkin osoittaa, että

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{-6 + \sqrt[3]{2(27(y-1) + \sqrt{108 + 729(y-1)^2})^2}}{3\sqrt[3]{4(27(y-1) + \sqrt{108 + 729(y-1)^2})}}$$

Lause 1.4. *Olkoon $f : A \to B$ and $g : B \to A$. Silloin g on funktion f käänteisfunktio jos ja vain jos $g \circ f = id_A$ ja $f \circ g = id_B$.*

Huomautus 1.3. Tarvitsemme todistuksessa seuraavaa pientä havaintoa: funktion f ja sen käänteisrelaation $g = \{(f(x), x) \mid x \in A\}$ yhdistetty relaatio $g \circ f = \{(x, x') \mid x \in A \text{ ja } x' \in f^{-1}(f(x))\}$ ja yhdistetty relaatio $f \circ g = \{(f(x), f(x)) \mid x \in A\}$.

Todistus. Oletetaan, että g on f:n käänteisfunktio. Nyt $f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ ja $g = \{(f(x), x) \mid x \in A\}$. Koska f on injektio lauseen 1.3 nojalla niin $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$, joten $g \circ f = \{(x,x) \mid x \in A\} = id_A$. Koska f on surjektio lauseen 1.3 nojalla, niin $f \circ g = \{(f(x), f(x)) \mid x \in A\} \overset{f \text{ surjektio}}{=} \{(y,y) \mid y \in B\} = id_B$.

Oletetaan nyt, että $g \circ f = id_A$ ja $f \circ g = id_B$ ja osoitetaan että $g = f^{-1}$ eli että $\{(y, g(y)) \mid y \in B\} = \{(f(x), x) \mid x \in A\}$. Olkoon $(y, g(y)) \in g$. Koska $f \circ g = id_B$, niin $y = f(g(y))$. Täten $(y, g(y)) = (f(g(y)), g(y)) = (f(x), x) \in f^{-1}$. Olkoon $(f(x), x) \in f^{-1}$. Koska $g \circ f = id_A$, niin $x = g(f(x))$. Täten $(f(x), x) = (f(x), g(f(x))) = (y, g(y)) \in g$. □

Esimerkki 1.14. Olkoon $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Helposti nähdään, että $g(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Täten f ei ole surjektio eikä sillä ole käänteisfunkiota. Olkoon nyt $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Koska

$$(f \circ f)(x) = \frac{f(x)}{f(x) - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x.$$

niin $f^{-1} = f$.

Esimerkki 1.15. Näimme että esimerkin 1.12 funktioille f ja g pätee $g \circ f = id_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. Nyt kuitenkin $f \circ g \neq id_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, sillä $f(g(0)) = f(0) = 1 \neq 0$. Täten funktiot f ja g eivät ole toistensa käänteisfunktioita.

Lopuksi äärellisten joukkojen välisiä kuvauksia koskeva tulos:

Lause 1.5. *Olkoon $f : A \to B$ ja $|A| = |B| < \infty$.*

(1) *Jos f on injektio, niin se on bijektio.*
(2) *Jos f on surjektio, niin se on bijektio.*

Todistus. (1) Jos f on injektio, niin $|f(A)| = |A| = |B|$. Täten f on myös surjektio.

(2) Oletetaan, että f on surjektio. Koska $A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$, missä $f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b') = \emptyset$ aina kun $b \neq b'$, niin $|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)|$. Koska f on surjektio, niin $|f^{-1}(b)| \geq 1$ kaikilla $b \in B$. Mutta $|A| = |B|$ joten $|f^{-1}(b)| = 1$ kaikilla $b \in B$. Täten f on injektio. □

2. Kombinatoriikkaa

Tällä kursilla kombinatoriikalla tarkoitetaan lukumäärien laskemista äärellisissä joukoissa. Sovellusalueita:

- algoritmien analysointi
- todennäköisyyslaskenta
- tilastotiede
- virheitä korjaavien koodien teoria
- laadunvalvonta
- perinnöllisyystiede

Seuraavaksi muutama valmistava esimerkki:

Esimerkki 2.1. Matti ja Teppo pelaavat tenniksessä ottelusarjan jonka voitaa se, joka ensiksi voittaa kaksi peräkkäistä ottelua tai kolme ottelua. Montako erilaista ottelusarjaa on olemassa?

Ratkaisu: Liitetään pelattuun otteluun symboli 1 jos Matti voitti, ja 0 jos Teppo voitti. Havainto: ottelusarja voi olla korkeintaan viiden ottelun mittainen. Ottelusarjat joissa Teppo voittaa ensimmäisen pelin: $00, 011, 0100, 01010, 01011$. Täten mahdollisia ottelusarjoja on 10 kpl.

Esimerkki 2.2. n tenniksen pelaajaa pelaa ottelusarjan, jossa kullakin kierroksella arvotaan pelaavat parit, ja seuraavalle kierrokselle pääsevät parien voittajat. Jos jollakin kierroksella on pariton määrä pelaajia, pääsee arvonnassa paritta jäänyt suoraan seuraavalle kierrokselle. Montako ottelua on pelattava, jotta löydetään ottelusarjan voittaja?

Ratkaisu: Kun ottelusarja on pelattu, on yksi pelaaja jäljellä, nimittäin voittaja. Täten $n-1$ kpl pelaajaa on pudonnut ottelusarjan kuluessa. Siispä pelejä on pelattu $n-1$ kpl.

2.1. **Tulo- ja summaperiaate.**

Esimerkki 2.3.

(1) Montako 3-pituista merkkijonoa voidaan muodostaa kirjaimista a, b, c, d?
(2) Entäpä jos kukin merkki saa esiintyä vain kerran?

Ratkaisu:

(1) Ensimmäinen merkki voidaan valita neljällä tavalla. Jokaista tällaista merkkiä kohti toinen merkki voidaan valita neljällä tavalla. Siis 2-pituisia merkkijonoja on $4 \cdot 4$ kpl. Jokaista tällaista merkkijonoa kohti kolmas merkki voidaan valita neljällä tavalla. Siis 3-pituisia merkkijonoja on $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ kpl.
(2) Jälleen ensimmäinen merkki voidaan valita neljällä tavalla, mutta toinen merkki vain kolmella ja kolmas merkki kahdella tavalla. Vastaus: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ kpl.

Edellisen esimerkin yleistyksenä saadaan:

Tuloperiaate: Oletetaan että valintatehtävä voidaan jakaa n:ään toisistaan riippumattomaan vaiheeseen ja 1. vaiheessa valinta voidaan suorittaa k_1 tavalla, 2. vaiheessa k_2 tavalla, $\ldots$, n. vaiheessa k_n tavalla. Silloin valintatehtävä voidaan suorittaa $k_1 k_2 \cdots k_n$ tavalla.

Esimerkki 2.4. Merkitään $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Kuinka monta järjestettyä n-jonoa kuuluu joukkoon $\mathbb{F}_2^n$?

Ratkaisu: Tuloperiaatteen nojalla jonoja on $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{\text{n kertaa}} = 2^n$ kpl.

Määritelmä 2.1. Olkoon A joukko jossa on n alkiota, ja olkoon $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq n$. Joukon A *k-permutaatio* on sellainen k-jono $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, jossa $a_i \neq a_j$ aina kun $i \neq j$. Jos $k = n$, niin k-permutaatiota sanotaan *permutaatioksi.*

Lause 2.1. *n-alkioisen joukon k-permutaatioden lukumäärä*

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Erityisesti, permutaatioiden lukumäärä

$$P(n, n) = n!.$$

Todistus. Jonossa $(a_1, \ldots, a_k)$ ensimmäinen komponentti voidaan valita n, toinen komponentti $n-1$, ..., ja k:s komponentti $n-k+1$ tavalla. Tuloperiaate:

$$P(n, k) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

□

Esimerkki 2.5. Montako osajoukkoa on n-alkioisella joukolla?

Ratkaisu: Kahden alkion joukon $\{a, b\}$ osajoukot ovat $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$; näitä vastaavat 2-pituiset bittivektorit $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$. Kolmen alkion joukon $\{a, b, c\}$ osajoukot ovat $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$; näitä vastaavat 3-pituiset bittivektorit $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$, $(1,1,1)$.

Vastaavasti n-alkioisen joukon A osajoukkojen ja n-pituisten bittivektorien välille saadaa bijektiivinen vastaavuus: kuvataan kukin k:n alkion osajoukko $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$ bittivektoriksi jossa on ykkönen täsmälleen niissä paikoissa joiden indeksit ovat $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Siispä Esimerkin 2.4 nojalla n-alkioisen joukon osajoukkojen lukumäärä on 2^n.

Esimerkki 2.6. Olkoon A m-alkioinen ja B n-alkioinen joukko. Montako

(1) relaatiota on joukosta A joukkoon B?
(2) funktioita on joukolta A joukkoon B?
(3) injektiota on joukolta A joukkoon B?

Ratkaisu:

(1) Karteesisessa tulossa $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ on tuloperiaatteen nojalla mn alkiota. Nyt Esimerkin 2.5 nojalla joukolla $A \times B$ on 2^{mn} osajoukkoa. Täten relatioita joukosta A joukkoon B on 2^{mn} kpl.

(2) Olkoon $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Funktioita $f = \{(a_1, f(a_1)), \ldots, (a_m, f(a_m))\}$ on sama määrä kuin vektoreita $(f(a_1), \ldots, f(a_m))$. Kukin arvoista $f(a_i)$ voidaan valita n tavalla, joten tuloperiaatteen nojalla funktioita joukolta A joukkoon B on $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{m \text{ kpl}} = n^m$ kpl.

(3) Jos f on injektio, niin $m = |f(A)| \leq n$. Siispä:

  (a) Jos $m > n$ niin ei ole olemassa injektiota $A \to B$.

  (b) Jos $m \leq n$, niin jono $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m))$ voidaan valita $n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = P(n,m)$ tavalla eli injektioita on tapauksessa $m \leq n$ $P(n,m)$ kpl.

Summaperiaatteeseen johdutaan seuraavan esimerkin kautta.

Esimerkki 2.7. Tietokoneen salasanassa on 6-10 merkkiä aakkostosta

$$\mathcal{A} = \{a, A, b, B, \ldots, z, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

(1) Montako tällaista salasanaa voidaan muodostaa?

(2) Montako sellaista salasanaa voidaan muodostaa, jossa yksikään merkki ei toistu?

(3) Montako sellaista salasanaa voidaan muodostaa, jossa jokin merkki toistuu?

Ratkaisu:

(1) Tuloperiaatteen nojalla k-pituisia merkkijonoja on 62^k kappaletta. Täten 6-10 pituisia salasanoja on $62^6 + 62^7 + 62^8 + 62^9 + 62^{10} = 62^6(62^5 - 1)/61 = 853058370935030 46 \simeq 8.53 \times 10^{17}$ kpl.

(2) Sellaisten k-pituisten salasanojen lukumäärä jossa yksikään merkki ei toistu on $P(62, k)$. Täten sellaisia 6-10 pituisia salasanoja joissa yksikään merkki ei toistu on

$P(62,6)+P(62,7)+P(62,8)+P(62,9)+P(62,10) = 397665153770704560$ $\simeq 3.98 \times 10^{17}$ kpl.

(3) Vastaus: $853058370935030464-397665153770704560 = 455393217164325904 \simeq 4.55 \times 10^{25}$ kpl.

Summaperiaate: Olkoon A pareittain erillisten joukkojen yhdiste ts.

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_k,$$

missä $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina kun $i \neq j$. Silloin A:sta voidaan valita alkio $|A_1| + \cdots + |A_k|$ tavalla.

2.2. **Kombinaatiot ja toistokombinaatiot.**

Tarkastellaan seuraavaksi valintatehtäviä, joissa valittujen objektien keskinäisellä järjestyksellä ei ole merkitystä.

Esimerkki 2.8. Monellako tavalla kymmenen ihmisen joukosta voidaan valita kolmen hengen työryhmä?

Ratkaisu: Olkoon kysytty lukumäärä x. Jokaisesta valitusta työryhmästä saadaan 3-permutaatioita $3! = 6$ kpl. Toisaalta, näin saadaan kaikki ko. ihmisjoukon 3-permutaatiot. Siispä $6x = P(10, 3)$ eli kolmen hengen työryhmä voidaan valita

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{10!}{(10-3)!3!}$$

tavalla.

Määritelmä 2.2. Olkoon A joukko jossa on n alkiota. Jokainen A:n k-alkioinen osajoukko on sen *k-kombinaatio.*

Edellinen esimerkki yleistyy välittömästi seuraavaksi lauseeksi:

Lause 2.2. *Jokaisesta n:n alkion joukosta voidaan valita k-kombinaatio täsmälleen*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

tavalla.

Lukuja $\binom{n}{k}$ sanotaan *binomikertoimiksi.*

Esimerkki 2.9.

(1) Montako ehdon $1 \leq a < b < c \leq 10$ toteuttavaa kokonaislukukolmikkoa (a, b, c) voidaan muodostaa?

(2) Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja k ehdon $1 \leq k \leq n$ toteuttava kokonaisluku. Montako ehdon $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ toteuttavaa k-jonoa $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ voidaan muodostaa?

Ratkaisu:

(1) Ehdon $1 \leq a < b < c \leq 10$ toteuttavat kolmikot (a, b, c) ovat bijektiivisessä vastaavuudessa 3-kombinatioiden $\{a, b, c\}$ kanssa. Täten kyseessä olevia kolmikoita on $\binom{10}{3}$ kpl.

(2) Kyseessä olevia k-jonoja on täsmälleen sama määrä kuin n-alkioisen joukon k-kombinaatioita eli $\binom{n}{k}$ kpl.

Esimerkki 2.10.

(1) Monessako 6-pituisessa bittijonossa ei ole kahta perättäistä nollaa?

(2) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Monessako n-pituisessa bittijonossa ei ole kahta perättäistä nollaa?

Ratkaisu:

(1) Kysyttyjä jonoja joissa ei ole yhtäkään nollaa on 1 kpl ja jonoja joissa on yksi nolla on 6 kpl. Entäpä ko. jonoja joissa on kaksi nollaa? Tällöin siis ykkösiä käytetään 4 kpl ja nyt kaksi nollaa nollaa voidaan sijoittaa merkin _ osoittamiin paikkoihin jonossa _1_1_1_1_. Eli ko. jonoja joissa on kaksi nollaa on $\binom{5}{2} = \binom{6-2+1}{2}$ kpl. Vastaavasti ne ko. jonot joissa on kolme nollaa (ja siis kolme ykköstä) saadaan sijoittamalla ne merkin _ osoittamiin paikkoihin jonossa _1_1_1_. Tällaisia jonoja on $\binom{4}{3} = \binom{6-3+1}{3}$ kpl. Jos 6-pituisessa bittijonossa on enemmän kuin kolme nollaa, on siinä välttämättä (vähintään) kaksi perättäistä nollaa.

Täten kysyttyjä jonoja on

$$\binom{6-0+1}{0} + \binom{6-1+1}{1} + \binom{6-2+1}{2} + \binom{6-3+1}{3} = 1 + 6 + 10 + 4 = 21 \text{ kpl.}$$

(2) Samalla päättelyllä saadaan, että kysyttyjä jonoja on

$$\sum_{i=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n-i+1}{i} \text{ kpl.}$$

Esimerkki 2.11. Valitaan uudet pää-, ulko-, valtiovarain-, opetus- ja sisäministeri. Virkoihin on tarjolla viisi naista joista pääministeriksi voidaan valita kaksi, ja neljä miestä joista pääministeriksi voidaan valita yksi. Monellako tavalla valinta voidaan tehdä, jos ministereistä kolmen on oltava nainen?

Ratkaisu: Oletetaan ensin että pääministeriksi valitaan nainen. Nyt pääministeri voidaan valita kahdella tavalla. Muut kaksi naisten ministerin salkkua voidaan valita joukosta {ulko,valtiovarain,opetus, sisä} $\binom{4}{2} = 6$ tavalla, ja näihin virkoihin voidaan valita nainen $4 \cdot 3 = 12$ tavalla. Jäljellä oleviin virkoihin valitaan mies $4 \cdot 3 = 12$ tavalla. Tuloperiaate: Sellaisia valintoja joissa pääministeriksi valitaan nainen on $2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ kpl.

Oletetaan sitten, että pääministeriksi valitaan mies. Nyt pääministeri voidaan valita yhdellä tavalla. Kolme naisten ministerin salkkua voidaan valita $\binom{4}{3} = 4$ tavalla, ja näihin virkoihin voidaan valita nainen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ tavalla. Jäljellä olevaan virkaan voidaan valita mies kolmella tavalla. Tuloperiaate: Sellaisia valintoja joissa pääministeriksi valitaan mies on $1 \cdot 4 \cdot 60 \cdot 3 = 720$ kpl.

Summaperiaate: valinta jossa kolme ministereistä on naisia voidaan tehdä $1728 + 720 = 2448$ tavalla.

Binomikertoimien ominaisuuksia:

Lause 2.3.

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
(3) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
(4) *Pascalin kolmio:* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Todistus.

(1) Jokaista k:n alkion osajoukkoa kohti on täsmälleen yksi $(n-k)$:n alkion osajoukko.
(2) Tyhjä joukko on ainoa 0-alkioinen osajoukko.
(3) Yksi alkio n:stä mahdollisesta voidaan valita n tavalla.
(4) Olkoon A n-alkioinen joukko ja a jokin sen alkio. Olkoon A' mikä tahansa A:n k-alkioinen osajoukko. On kaksi mahdollisuutta: joko $a \in A'$ tai $a \notin A'$.

Sellaisia osajoukkoja A' joihin a kuuluu on täsmälleen $\binom{n-1}{k-1}$ kpl (miksi?), ja sellaisia osajoukkoja A' joihin a ei kuulu on täsmälleen $\binom{n-1}{k}$ kpl (miksi?). Nyt summaperiaatteen nojalla A:n k-alkioisten osajoukkojen lukumäärä on $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

$\square$

Huomautus 2.1. Pascalin kolmio nimitys tulee siitä, että se voidaan esittää muodossa

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Lause 2.4 (Newtonin binomilause)**.** *Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $x, y \in \mathbb{C}$. Silloin*

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Todistus. Ensinnäkin

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y) = \sum_{\substack{i,j\geq 0 \\ i+j=n}} a_{i,j} x^i y^j.$$

Koska tulo x^i voidaan muodostaa valitsemalla tulossa $(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ n:stä mahdollisesta x:stä i kpl, ja tämän jälkeen tulo y^j voidaan muodostaa valitsemalla $(n-i)$:stä mahdollisesta y:stä j kpl, niin

$$a_{i,j} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}.$$

Koska

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \frac{n!}{i!j!(n-(i+j)!} = \frac{n!}{i!j!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i},$$

niin

$$(x+y)^n = \sum_{\substack{i,j\geq 0 \\ i+j=n}} \binom{n}{i} x^i y^j = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

$\square$

Sopimus: $0^0 = 1$.

Esimerkki 2.12. Newtonin binomilauseen ja Pascalin kolmion nojalla

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Newtonin binomilause yleistyy välittömästi multinomilauseeksi.

Lause 2.5 (Multinomilause)**.** *Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{C}$. Silloin*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\dots n_k \geq 0 \\ n_1+\cdots+n_k=n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k},$$

missä

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Todistus. Ks. binomilauseen todistus. □

Lukuja $\binom{n}{n_1,\dots,n_k}$ sanotaan *multinomikertoimiksi.*

Esimerkki 2.13. Lasketaan $(a+b+c)^2$. Seuraavassa taulukossa on luetteloitu kaikki yhtälön $i+j+k=2$ ei-negatiiviset kokonaislukuratkaisut sekä vastaavat multinomikertoimet ja monomit:

i	j	k	$\binom{2}{i,j,k}$	$a^i b^j c^k$
2	0	0	1	a^2
0	2	0	1	b^2
0	0	2	1	c^2
1	1	0	2	ab
1	0	1	2	ac
0	1	1	2	bc

Nyt multinomilauseen nojalla

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

Huomautus 2.2. Multinomilause (ja täten erityisesti binomilause) pätee myös silloin kun $\mathbb{C}$ korvataan millä tahansa kommutatiivisella renkaalla.

Yleisesti johdumme multinomikertoimiin seuraavan tyyppisissä tehtävissä:

Lause 2.6. *Olkoot $n_1, n_2, \dots, n_k$ ei-negatiivisia kokonaislukuja ja $n = n_1 + \cdots + n_k$. Silloin n-alkioinen joukko A voidaan jakaa pareittain erillisten n_i-alkioisten osajoukkojen A_i yhdisteeksi*

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$$

täsmälleen $\binom{n}{n_1,\dots,n_k}$ tavalla.

Todistus. A_1 voidaan valita $\binom{n}{n_1}$ tavalla. Tämän jälkeen A_2 voidaan valita $\binom{n-n_1}{n_2}$ tavalla jne. Tuloperiaatteen nojalla koko valintatehtävä voidaan suorittaa

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-(n_1+\cdots+n_{k-1})}{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

tavalla. □

Esimerkki 2.14. Kalevan kisojen 200 metrin juoksuun osallistuu 23 kilpailijaa, jotka jaetaan kolmeen alkuerään: 1. ja 2. erään 8 juoksijaa, ja 3. erään 7 juoksijaa. Monellako tavalla jako voidaan tehdä?

Ratkaisu: 23 alkion joukko voidaan jakaa pareittain erisuurien 8-,8- ja 7-alkioisen osajoukon yhdisteeksi täsmälleen $\binom{23}{8,8,7} = \frac{23!}{8!8!7!} = 3155170590$ tavalla.

Esimerkki 2.15.

(1) Montako erilaista sanaa saadaan sanasta MISSISSIPPI kirjainten järjestystä vaihtamalla?
(2) Montako sellaista sanaa saadaan joissa ei esiinny peräkkäisiä I-kirjaimia?

Ratkaisu:

(1) Tehtävänä on siis kirjaimien M,I,S,S,I,S,S,I,P,P,I sijoittaminen 11 paikkaan. Nämä paikat muodostavat 11-alkioisen A joukon jonka jaamme neljän pareittain erisuuren osajoukkon A_M, A_I, A_S ja A_P yhdisteeksi, missä $|A_M| = 1$, $|A_I| = 4$, $|A_S| = 4$ ja $|A_P| = 2$. Tämä jako voidaan tehdä
$$\binom{11}{1,4,4,2} = \frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650$$
tavalla. Vastaus: 34650 sanaa.
(2) Sanoja joissa I-kirjainta ei esiinny saadaan $\binom{7}{1,4,2}$ kpl. Eräs tällainen sana on _M_S_S_S_P_P_S_, jossa I-kirjain voidaan sijoittaa merkin _ osoittamiin paikkoihin. Täten neljä I:tä voidaan sijoittaa $\binom{8}{4}$ paikkaan ja niinpä sellaisia sanoja joissa ei ole peräkkäisiä I-kirjaimia on $\binom{7}{1,4,2}\binom{8}{4} = 1050$ kpl

2.2.1. *Toistokombinaatiot.*

Lauseen 2.1 nojalla n-alkioisesta joukosta voidaan valita k alkiota $\binom{n}{k}$ tavalla. Tarkastellaan seuraavassa vastaavaa valintatehtävä;, kun valittu alkio palautetaan aina takaisin joukkoon.

Esimerkki 2.16. Laatikossa on punainen (P), sininen (S) ja valkoinen (V) pallo. Suoritetaan kaksi nostoa ja palautetaan aina nostettu pallo takaisin laatikkoon. Montako nostojakaumaa on olemassa?

Ratkaisu: Mahdolliset jakaumat on luetteloitu alla olevassa taulukossa, missä esim. neljäs rivi tarkoittaa jakaumaa "yksi punainen pallo ja yksi sininen pallo":

P	S	V
2	0	0
0	2	0
0	0	2
1	1	0
1	0	1
0	1	1

Täten kysyttyjä jakaumia on 6 kpl.

Määritelmä 2.3. n-alkioisen joukon $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *k-toistokombinaatio* (tai *k-jakauma*) on joukko $\{(m_1, a_1), (m_2, a_2), \ldots, (m_n, a_n)\}$, missä $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ja $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k$.

Huomautus 2.3. Määritelmästä seuraa että n-alkioisen joukon k-toistokombinaatiot ovat bijektiivisessä vastaavuudessa sellaisten n-monikkojen $(x_1, \ldots, x_n)$ kanssa, missä $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ ja $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.

Montako k-toistokombinaatiota on n-alkioisella joukolla? Tähän kysymykseen vastataan kohta. Todistetaan ensin pieni aputulos:

Lemma 2.1. *Olkoot k ja n ei-negatiivisia kokonaislukuja. Aakkostosta $\{\circ, |\}$ voidaan muodostaa täsmälleen $\binom{n+k-1}{n-1}$ muotoa*

$$|\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{x_1\ kpl}|\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{x_2\ kpl}|\ldots|\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{x_n\ kpl}|$$

olevaa merkkijonoa, missä $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$.

Todistus. Ko. merkkijonoja varten tarvitaan k paikkaa symbolille $\circ$ ja $n+1$ paikkaa symbolille $|$. Koska ensimmäisen ja viimeisen $|$:n paikat ovat kiinnitetyt, niin lopuille $n-1$ symbolille $|$ voidaan valita paikka $\binom{n+k-1}{n-1}$ tavalla, ja loput paikat täytetäänkin sitten symboleilla $\circ$. $\square$

Seuraus 2.1. *Yhtälöllä $x_1 + \cdots + x_n = k$ on täsmälleen $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ ei-negatiivista kokonaislukuratkaisua $(x_1, \ldots, x_n)$ (ts. $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.)*

Lause 2.7. *n-alkioisen joukon k-toistokombinaatioiden lukumäärä on* $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

Todistus. Yhtälöllä $x_1+\cdots+x_n = k$ on $\binom{n+k-1}{n-1}$ ei-negatiivista kokonaislukuratkaisua Seurauksen 2.1 nojalla. Väite seuraa nyt Huomautuksesta 2.3. $\square$

Esimerkki 2.17.

(1) Monellako tavalla voidaan jakaa seitsemän omenaa ja kaksi banaania neljälle lapselle?
(2) Entäpä jos asetetaan lisäehto, että jokaisen lapsen on saatava vähintään yksi omena?

Ratkaisu:

(1) Yhtälöllä $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ on $\binom{4+7-1}{7} = 120$ ei-negatiivista kokonaislukuratkaisua. Täten omenat voidaan jakaa 120 tavalla. Vastaavasti banaanit voidaan jakaa $\binom{4+2-1}{2} = 10$ tavalla. Tuloperiaatteen nojalla omenat ja banaanit voidaan jakaa lapsille $120 \cdot 10 = 1200$ tavalla.
(2) Nyt etsimme yhtälön $x_1+x_2+x_3+x_4 = 7$ kokonaislukuratkaisujen (x_1, x_2, x_3, x_4) lukumäärää missä kukin $x_i \geq 1$. Muuttujien vaihto $y_i = x_i - 1$ johtaa ekvivalenttiin yhtälöön $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7 - 4$, $y_i \geq 0$. Seurauksen 2.1 nojalla omenat voidaan jakaa $\binom{4+7-4-1}{7-4} = 20$ tavalla, ja täten omenat ja banaanit $20 \cdot 10 = 200$ tavalla.

Esimerkki 2.18. Tietoliikenneviesti koostuu 12 eri symbolista. Se lähetetään kanavaan siten, että kahden peräkkäisen symbolin välissä on vähintään 3 blankoa. Monellako tavalla viesti voidaan lähettää kanavaan, jos yhteensä 45 blankoa käytetään?

Ratkaisu: Merkitään viestissä niitä paikkoja joihin tulee blanko symbolilla $\circ$, ja niitä paikkoja joihin tulee viestisymboli symbolilla $|$. Nyt tarkasteltavat merkijonot ovat muotoa

$$|\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{x_1 \text{ kpl}}|\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{x_2 \text{ kpl}}|\ldots|\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{x_{11} \text{ kpl}}|$$

missä $x_1 + \cdots + x_{11} = 45$ ja $x_i \geq 3$. Muuttujien vaihdolla $y_i = x_i - 3$ päädymme ekvivalenttiin yhtälöön $y_1 + \cdots + y_{11} = 45 - 11 \cdot 3 = 12$, $y_i \geq 0$. Seurauksen 2.1

nojalla tällä yhtälöllä on $\binom{11+12-1}{12} = \binom{22}{12}$ ratkaisua, ja täten ko. merkkijonoja on $\binom{22}{12}$ kpl. Täten annettu tietoliikenneviesti voidaan lähettää $\binom{22}{12}$ tavalla.

Esimerkki 2.19. (Vertaa Esimerkkiin 2.9)

(1) Montako ehdon $1 \leq a \leq b \leq c \leq 10$ toteuttavaa kokonaislukukolmikkoa (a, b, c) voidaan muodostaa?
(2) Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja k ehdon $1 \leq k \leq n$ toteuttava kokonaisluku. Montako ehdon $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ toteuttavaa k-jonoa $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ voidaan muodostaa?

Ratkaisu:

(1) Esimerkiksi kolmikkoa (a, a, c) vastaa joukon $\{1, 2, \ldots, 10\}$ toistokombinaatio $\{(2, a), (0, b), (1, c)\}$. Näin saadaan bijektiivinen vastaavuus kolmikkojen ko. (a, b, c) ja joukon $\{1, 2, \ldots, 10\}$ 3-toistokombinaatioiden välille. Siispä ko. kolmikoita on $\binom{10+3-1}{3} = 240$ kpl.
(2) Kyseessä olevia k-jonoja on täsmälleen sama määrä kuin n-alkioisen joukon k-toistokombinaatioita eli $\binom{n+k-1}{k}$ kpl (Lause 2.7).

Esimerkki 2.20. Montako kertaa seuraava ohjelma tulostaa sanan VY.

```
for i:=1 to 100 do
    for j:=1 to i do
        for k:=1 to j do
            Print("VY")
```

Ratkaisu: Sana VY tulostetaan täsmälleen niin monta kertaa kuin on kolmikoita $1 \leq k \leq j \leq i \leq 100$. Esimerkin 2.19 nojalla sana VY tulostetaan siis $\binom{100+3-1}{3} =$ 171700 kertaa.

Esimerkki 2.21. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Lasketaan summa

$$\sum_{t=1}^{n} t^2.$$

Kolmikoita $1 \leq k \leq j \leq i \leq n$ on $\binom{n+3-1}{3} = n(n+1)(n+2)/3$ kpl. Olkoon t ehdon $1 \leq t \leq n$ täyttävä kiinnitetty kokonaisluku. Kolmikoita $1 \leq k \leq j \leq i = t$ on

$\binom{t+2-1}{2} = t(t+1)/2$ kpl. Siispä

$$\binom{n+3-1}{3} = \sum_{t=1}^{n} \binom{t+2-1}{2}$$

eli

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} t(t+1) = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} t^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

ja täten

$$\sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.3. **Lokeroperiaate.**

Seuraavalla havainnolla on yllättävän paljon epätriviaaleja sovelluksia:

Lokeroperiaate: Jos m esinettä sijoitetaan n:ään lokeroon ja $m > n$, niin johonkin lokeroon tulee vähintään kaksi esinettä.

Esimerkki 2.22. Sokealla miehellä on laatikossa 10 harmaata ja 10 mustaa sukkaa. Kuinka monta sukkaa hänen täytyy ottaa laatikosta, jotta niiden joukossa olisi varmasti kelvollinen pari?

Ratkaisu: Lokerot: harmaa ja musta, esineet: nostetut sukat. Lokeroperiaatteen mukaan riittää nostaa kolme sukkaa.

Esimerkki 2.23. Onko Helsingissä kaksi ihmistä joilla on tarkalleen yhtä monta hiusta päässään.

Ratkaisu: Ihmisellä on korkeintaan 60000 hiusta. Lokerot: eri hiuslukumäärät, esineet: helsinkiläiset. Koska esineitä on enemmän kuin lokeroita, niin lokeroperiaatteen nojalla vastaus on kyllä.

Lokeroperiaattetta voidaan hivenen yleistää:

Yleistetty lokeroperiaate: Olkoon $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina kun $i \neq j$. Jos $|A| \geq kn + 1$, niin ainakin yhdelle osajoukolle pätee $|A_i| \geq n + 1$.

Todistus. Jos $|A_i| \leq n$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$, niin $|A| \leq kn$. $\square$

Esimerkki 2.24. Sokean miehen sukkalaatikossa on nyt sukkia viittä eri väriä. Kuinka monta sukkaa on otettava, jotta saataisiin varmasti jotakin väriä kaksi paria?

Ratkaisu: Lokerot: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (sukkien värit), esineet: nostetut sukat. Jossakin joukoista A_i on oltava vähintään $4 = n + 1$ sukkaa. Riittää siis nostaa $5 \cdot (4 - 1) + 1 = 16$ sukkaa.

Esimerkki 2.25. Osoita että kuuden ihmisen joukossa on aina sellainen kolmikko, jossa joko kaikki ovat keskenään ystäviä tai kukaan ei ole kenenkään ystävä.

Ratkaisu: Otetaan henkilö A erilleen muista. Kaksi lokeroa: A:n ystävät, A:n ei-ystävät; esineet muut viisi henkilöä. Yleistetyn lokeroperiaatteen nojalla jommassa kummassa lokerossa on vähintään kolme henkilöä.

Oletetaan ensin että tämä lokero on A:n ystävien lokero. Jos ko. lokerossa olevista yksikään pari ei ole keskenään ystäviä, olemme löytäneet ei-ystäväkolmikon. Jos jokin pari C, D on muodostuu ystävyksistä, niin olemme löytäneet ystäväkolmikon A, B, C.

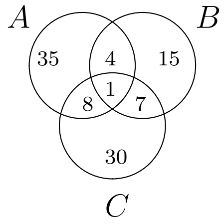
Tapaus jossa kolme henkilöä kuuluu A:n ei-ystävien lokeroon, käsitellään lähes samoin: jos ko. lokerossa kaikki ovat keskenään ystäviä olemme löytäneet ystäväkolmikon. Jos taas jokin pari C, D muodostuu ei-ystävistä, niin olemme löytäneet ei-ystäväkolmikon A, B, C.

2.4. **Seulaperiaate.**

Esimerkki 2.26. Yliopistossa on 1543 opiskelijaa, joista 35 pelaa jalkapalloa, 15 pelaa koripalloa ja 30 pelaa jääkiekkoa. Edelleen 4 pelaa sekä jalka- että koripalloa, 8 sekä jalkapalloa että jääkiekkoa, 7 sekä koripalloa että jääkiekkoa ja 1 pelaa kaikkia kolmea.

(1) Kuinka moni pelaa ainakin jotakin?
(2) Moniko ei pelaa mitään?

Ratkaisu: Seuraava kuva havainnollistaa tilannetta:



(1) Vastaus: $35 + 15 + 30 - 4 - 8 - 7 + 1 = 62$
(2) Vastaus: $1543 - 62 = 1481$

Seulaperiaate kahdelle ja kolmelle äärelliselle joukolle:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Yleisesti:

Lause 2.8. *Olkoot $A_1, \ldots, A_n$ äärellisiä joukkoja. Silloin*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ - + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Todistus. Olkoon $x \in A := A_1 \cup \cdots \cup A_n$, ja olkoon s niiden osajoukkojen A_i lukumäärä joihin x kuuluu. Nyt kukin tällainen x tulee lasketuksi mukaan $s - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} - + \cdots + (-1)^{s-1}\binom{s}{s}$ kertaa väitteen oikeassa puolessa. Koska Newtonin binomikaavan nojalla

$$0 = (-1+1)^s = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (-1)^i = 1 - s + \binom{s}{2} - \binom{s}{3} + - \cdots + (-1)^s \binom{s}{s},$$

niin kukin $x \in A$ lasketaan mukaan väitteen oikeassa puolessa täsmälleen kerran. □

Esimerkki 2.27. n opiskelijaa menee Diskreetin Matematiikan tenttiin ja jättää takkinsa naulakkoon. Lähtiessään tentistä opiskelijat ovat sen verran pökerryksissä, että kukin ottaa umpimähkään yhden takin. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi opiskelija saa oman takkinsa?

Ratkaisu: Olkoon a sellaisten takkien jakojen lukumäärä jossa ainakin yksi takki osuu oikealle henkilölle, ja olkoon b kaikkien mahdollisten jakojen lukumäärä. On siis laskettava suhde a/b.

Mahdollisia jakoja vastaavat kaikki joukon $\{1, \ldots, n\}$ permutaatiot $(j_1, \ldots, j_n)$, joten $b = n!$.

Olkoon A_i niiden permutaatioiden joukko joissa i:s takki on omalla paikallaan, ts. $j_i = i$. Nyt $a = |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$ ja laskemme a:n käyttäen seulaperiaatetta. Ensinnäkin $|A_i| = (n-1)!$ sillä nyt i:s takki on paikallaan ja muut $n-1$ voivat olla missä tahansa järjestyksessä. Toiseksi $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ eli i :s ja j:s takki paikallaan, muut sekaisin, ja tällaisia termejä on summassa $\sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$ Esimerkin 2.9 nojalla $\binom{n}{2}$ kpl.

Yleisesti: $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$ ja summassa

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

on $\binom{n}{k}$ termiä, jälleen Esimerkin 2.9 nojalla. Nyt seulaperiaatteen nojalla

$$\begin{aligned} a &= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)! \\ &= \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! - \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! + - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{n!0!}0! \\ &= n!\Big(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\Big). \end{aligned}$$

Täten kysytty todennäköisyys

$$\frac{a}{b} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Kun n lähestyy ääretöntä, niin a/b lähestyy arvoa $1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - 1/e \simeq 0.632$. Huomaa, että jo 9 henkilön tapauksessa $a/b \simeq 1 - 1/e$ kuuden desimaalin tarkkuudella.

Esimerkki 2.28. Monellako tavalla voidaan 24 samanlaista tehtävää jakaa neljälle tietokoneelle, jos kullekin koneelle on tultava $3 - 8$ tehtävää?

Ratkaisu: Etsimme siis yhtälön $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$ ehdon $3 \le x_i \le 8$ $(i = 1, \ldots, 4)$ täyttävien kokonaislukuratkaisujen lukumäärää n. Muuttujanvaihto $y_i = x_i - 3$ $(i =$

$1, \dots, 4)$ antaa yhtälön $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 24 - 4 \cdot 3 = 12$, missä $0 \leq y_i \leq 5$ $(i = 1, \dots, 4)$.

Olkoon A tämän yhtälön kaikkien ei-negatiivisten ratkaisujen joukko ja olkoon A_i niiden ratkaisujen joukko, joilla $y_i > 5$. Nyt $n = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$. Tässä $|A| = \binom{12+4-1}{12} = 455$.

Muuttujanvaihto $u = y_1 - 6$ antaa yhtälön $u + y_2 + y_3 + y_4 = 12 - 6 = 6$, ja tämän ei-negatiivisten kokonaislukuratkaisujen lkm on $\binom{6+4-1}{6}$. Siispä $|A_1| = \binom{6+4-1}{6} = 84$. Samoin nähdään, että $|A_i| = \binom{6+4-1}{6}$ kun $i = 2, 3, 4$.

Lasketaan $|A_1 \cap A_2|$. Nyt muuttujanvaihto $u = y_1 - 6,\ v = y_2 - 6$ antaa yhtälön $u + v + y_3 + y_4 = 12 - 2 \cdot 6 = 0$, ja tällä on täsmälleen yksi ei-negatiivinen kokonaislukuratkaisu. Samoin nähdään, että $|A_i \cap A_j| = 1$ kaikilla pareilla (i, j) missä $1 \leq i < j \leq 4$.

Nyt on selvää että $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = 0$ jos $k > 2$, ja täten seulaperiaatteen nojalla $n = 455 - 4 \cdot 84 + \binom{4}{2} \cdot 1 = 125$.

2.5. **Partitiot.**

2.5.1. *Joukon partitio.* Tarkastellaan seuraavaksi kysymystä monellako tavalla n-alkioinen joukko voidaan partitioida k:n epätyhjän osajoukon yhdisteeksi eli etsimme esityksiä $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$, missä kukin A_i on epätyhjä ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina kun $i \neq j$. Lisäksi yhdisteeseen kuuluvien osajoukkojen keskinäisellä järjestyksellä ei ole merkitystä.

Esimerkki 2.29. Joukon $A = \{a, b, c, d\}$ partitiot kahden epätyhjän osajoukon yhdisteeksi ovat $\{a\} \cup \{b, c, d\}$, $\{b\} \cup \{a, c, d\}$, $\{c\} \cup \{a, b, d\}$, $\{d\} \cup \{a, b, c\}$, $\{a, b\} \cup \{c, d\}$, $\{a, c\} \cup \{b, d\}$, $\{a, d\} \cup \{b, c\}$.

Esimerkki 2.30. Montako sellaista 2×4 bittimatriisia on olemassa, joissa kullakin rivillä on vähintään yksi ykkönen, ja jonka jokaisella sarakkeella on täsmälleen yksi ykkönen.

Ratkaisu: Liitetään kuhunkin joukon $A = \{a, b, c, d\}$ osajoukkoon 4-pituinen bittivektori Esimerkin 2.5 mukaisesti. Nyt kutakin joukon A partitiota kahden epätyhjän joukon yhdisteeksi vastaa rivien permutaatioiden lukumäärän (eli 2!) verran ko. matriiseja: ehto ”kullakin rivillä ykkönen” tarkoittaa sitä, että vastaavat osajoukot ovat epätyhjiä, ja ehto ”kullakin sarakkeella täsmälleen yksi ykkönen” sitä, että kukin A:n alkio kuuluu täsmälleen yhteen osajoukkoon. Esimerkiksi partitiota $\{a,c\} \cup \{b,d\}$ vastaa matriisit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Täten Esimerkin 2.29 nojalla ko. matriiseja on 14 kpl.

Lemma 2.2. *Sellaisten $k \times n$-bittimatriisien, jossa kukin rivi sisältää vähintään yhden ykkösen ja kukin sarake täsmälleen yhden ykkösen, lukumäärä on*

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

Todistus. Olkoon B_i sellaisten $k \times n$-bittimatriisien joukko, jossa kunkin matriisin kullakin sarakkeella on täsmälleen yksi ykkönen ja i:s rivi koostuu nollista, ja olkoon B niiden $k \times n$-bittimatriisien joukko jossa kunkin matriisin kullakin sarakkeella on täsmälleen yksi ykkönen. Nyt $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ muodostuu niistä matriiseista joissa jokin vaakarivi on nollarivi, ja täten väitteen muotoa olevia matriiseja on

$$|B| - |B_1 \cup \cdots \cup B_k| = k^n - |B_1 \cup \cdots \cup B_k|$$

kpl. Lasketaan $|B_1 \cup \cdots \cup B_k|$ käyttäen seulaperiaatetta.

Nyt $|B_i| = (k-1)^n$ sillä i:s rivi koostuu nollista ja täten kullekin sarakkeelle voidaan sijoittaa ykkönen täsmälleen $k-1$ tavalla.

Vastaavasti $|B_i \cap B_j| = (k-2)^n$, $|B_i \cap B_j \cap B_t| = (k-3)^n$ jne. Nyt seulaperiaatteen nojalla:

$$\begin{aligned} |B_1 \cup \cdots \cup B_k| &= \binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}(k-k)^n \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n, \end{aligned}$$

ja täten

$$|B| - |B_1 \cup \cdots \cup B_k| = k^n - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

□

Lause 2.9. *n-alkioinen joukko voidaan partitioida k:n epätyhjän osajoukon yhdisteeksi täsmälleen*

$$S(n,k) := \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

tavalla.

Todistus. Jokaista partitiota $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$, missä kukin $A_i \neq \emptyset$, kohti saadaan $k!$ sellaista $k \times n$ matriisia jossa kullakin rivillä on vähintään yksi ykkönen, ja jonka jokaisella sarakkeella on täsmälleen yksi ykkönen (ks. Esimerkki 2.30). Lemman 2.2 nojalla tällaisia matriiseja on $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$ kpl. $\square$

Lukuja $S(n,k)$ sanotaan *Stirlingin toisen lajin luvuiksi.*

Lause 2.10. *Olkoon* $2 \leq k \leq n-1$. *Silloin*

(1) $S(n,1) = S(n,n) = 1$,
(2) *Stirlingin kolmio:* $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.

Todistus. Selvästi $S(n,1) = 1$. Koska n alkioinen joukko voidaan partitioida n epätyhjään osaan täsmälleen yhdellä tavalla (kuhunkin osajoukkoon yksi alkio), niin $S(n,n) = 1$.

Todistetaan lopuksi (2) (vertaa Pascalin kolmion todistukseen): olkoon A n-alkioinen joukko a jokin sen alkio. Partitioita, joissa $\{a\}$ on yksi yhdisteeseen kuuluvista osajoukoista on täsmälleen $S(n-1,k-1)$ kpl. Muunlaiset partitiot voidaan muodostaa siten että partitioidaan joukko $A \setminus \{a\}$ k:n epätyhjän osajoukon yhdisteeksi ja lisätään a johonkin näistä osajoukoista. Tuloperiaate: näin saadaan $kS(n-1,k)$. Siispä partitioita on yhteensä $S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$ kpl. $\square$

Huomautus 2.4. Stirlingin kolmio voidaan esittää muodossa:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & S(1,1) & & \\
 & S(2,1) & & S(2,2) & \\
S(3,1) & & S(3,2) & & S(3,3) \\
 & & \vdots & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & \\
1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Esimerkki 2.31. Monellako tavalla n erilaista palloa voidaan sijoittaa k:hon samanlaiseen lokeroon, jos pallojen järjestyksellä yksittäisessä lokerossa ei ole merkitystä ja

(1) jokaiseen lokeroon on tultava vähintään yksi pallo?
(2) jos lokeroita voi jäädä tyhjäksi?

Ratkaisu:

(1) Kun n palloa sijoitetaan k:hon lokeroon, niin lopputulos vastaa n-alkioisen joukon partitoita k:n epätyhjän osajoukon yhdisteeksi, koska lokeroiden keskinäisellä järjestyksellä ei ole merkitystä. Vastaus: $S(n,k)$.

(2) Havaitsemme, että sellaisia jakoja joissa täsmälleen i lokeroa on tyhjiä on $S(n,k-i)$ kpl, sillä nyt kyseessä on kohdan (1) ongelma, kun k:n paikalla on $k-i$. Täten summaperiaatteen nojalla on

$$\sum_{i=0}^{k-1} S(n,k-i) = \sum_{i=1}^{k} S(n,i)$$

tapaa jakaa pallot lokeroihin.

Esimerkki 2.32. Köyhä mies kuoli. Häneltä jäi puukko, reppu, sadeviitta, kamiina, avain ja pullo. Kolme perillistä riitaantui ja sovittiin, että pesänhoitaja jakaa pesän kolmeen osaan, jotka sitten arvotaan. Monellako tavalla pesänhoitaja voi tehdä tehtävänsä?

Ratkaisu: Nyt kuusi erilaista esinettä sijoitetaan kolmeen samanlaiseen lokeroon (=osat). Siispä jako voidaan tehdä $S(6,3) = 90$ tavalla (ks. Stirlingin kolmio).

Esimerkki 2.33. Olkoon A m-alkioinen ja B n-alkioinen joukko. Montako surjektiota on joukolta A joukkoon B?

Ratkaisu: Jos $n > m$, niin surjektioita ei ole yhtäkään. Oletetaan, että $m \geq n$. Jokaista surjektioita f joukolta A joukkoon B vastaa eräs joukon A partitio n:n epätyhjän osajoukon yhdisteeksi: $\bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$. Toisaalta jokaista A:n partitioita $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ kohti saadaan täsmälleen $n!$ surjektiota: kukin joukon A_1 alkio kuvataan alkiolle b_1 ja b_1 voidaan valita n tavalla; kukin joukon A_2 alkio kuvataan alkiolle b_2 ja b_2 voidaan valita $n-1$ tavalla jne. Siispä surjektioita joukolta A joukkoon B on $n!S(m,n)$ kpl.

Esimerkki 2.34. Montako sellaista 6-pituista merkkijonoa voidaan muodostaa aakkostosta $\{a,b,c\}$, missä kukin merkki esiintyy ainakin kerran?

Ratkaisu: Olkoon $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ja $B = \{a,b,c\}$. Esimerkiksi merkkijonoa *abacca* vastaa surjektio $f : A \to B$, missä $f^{-1}(a) = \{1,3,6\}$, $f^{-1}(b) = 2$, $f^{-1}(c) =$

$\{4,5\}$. Näin saadaan bijektiivinen vastaavuus surjektioiden $f : A \to B$ ja kysyttyjen merkkijonojen välille. Siispä ko. merkkijonoja on $3!S(6,3) = 6 \cdot 90 = 540$.

Esimerkki 2.35. Myyntipäälliköllä on sihteeri (henkilö x) sekä kolme muuta alaista (henkilöt y, z, v) jotka toimivat laskutuksessa. Monellako tavalla myyntipäällikkö voi jakaa seitsemän laskua alaistensa käsiteltäviksi, jos jokaiselle on tultava ainakin yksi lasku ja sihteerille kaikkein kiirellisin lasku?

Ratkaisu: Olkoot $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ja $B = \{x,y,z,v\}$. Laskettavana on siis ehdon $f(1) = x$ täyttävien surjektioiden $f : A \to B$ lukumäärä.

Olkoon $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ jokin A:n 4-partitio. Nyt 1 kuuluu esim. A_1:een, joten $f(A_1) = x$. Siispä tätä partitiota kohti saadaan 3! ehdon $f(1) = x$ täyttävää surjektiota ja näin ollen ehdon $f(1) = x$ täyttävien surjektioiden lukumäärä on $3!S(7,4) = 6 \cdot 350 = 2100$.

2.5.2. *Luvun partitio.* Tarkastellaan seuraavaksi luonnollisen luvun n partitiota k:hon osaan ts. etsimme sellaisia positiivisia kokonaislukuja $n_1, \ldots, n_k$, että $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Tässä myöskään lukujen n_i järjestyksellä ei ole merkitystä.

Määritelmä 2.4. Olkoot $k, n \in \mathbb{Z}_+$. *Luvun n k-partitio* (tai *partitio k:hon osaan*) on mikä tahansa ehdot

(a) $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$,
(b) $1 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k$,

täyttävä kokonaislukumonikko $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Kaikkien luvun n k-partitioiden lukumäärää merkitään symbolilla $p(n,k)$.

Esimerkki 2.36. Luvun 8 partitiot neljään osaan:

$$\begin{gathered} 1+1+1+5 \\ 1+1+2+4 \\ 1+1+3+3 \\ 1+2+2+3 \\ 2+2+2+2 \end{gathered}$$

Täten $p(8,4) = 5$.

Lemma 2.3. *Olkoot $k, n \in \mathbb{Z}_+$. Sillon $p(n,k)$ on yhtälön*

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \cdots + ky_k = n$$

ehdot

(a) $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,
(b) $y_k \in \mathbb{Z}_+$,

täyttävien kokonaislukumonikkojen lukumäärä.

Todistus. Tarkastellaan yhtälöä $x_1+x_2+\cdots+x_k = n$ missä $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k$. Muuttujanvaihto $z_1 = x_1,\ z_2 = x_2 - x_1,\ z_3 = x_3 - x_2, \ldots, z_k = x_k - x_{k-1}$ johtaa yhtälöön $z_k + 2z_{k-2} + 3z_{k-3} + \cdots + kz_1 = n$, missä $z_k, z_{k-1}, \ldots, z_2 \geq 0$ ja $z_1 \geq 1$. □

Lause 2.11. *Olkoot $k, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Silloin*

(a) $p(n, 1) = p(n-1, n) = p(n, n) = 1$,
(b) $p(n, k) = 0$, *jos* $k > n$,
(c) $p(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k)$, *jos* $k < n$.

Todistus. (a) ja (b) seuraavat helposti luvun $p(n, k)$ määritelmästä. Kohdan (c) todistamiseksi tarkastellaan yhtälön $x_1 + 2x_2 + \cdots + (k-1)x_{k-1} + kx_k = n$ niitä ei-negatiivisia kokonaislukuratkaisuja joissa $x_k \geq 1$.

Sellaisia ratkaisuja joissa $x_k > 1$, on yhtä monta kuin yhtälöllä $x_1 + 2x_2 + \cdots + (k-1)x_{k-1} + k(y+1) = n$ missä $y = x_k - 1$ (≥ 1), siis $p(n-k, k)$ kpl.

Sellaisia ratkaisuja joissa $x_k = 1$, on yhtä monta kuin yhtälöllä $x_1 + 2x_2 + \cdots + (k-1)x_{k-1} + (k-1) + 1 = n$ eli yhtälöllä $x_1 + 2x_2 + \cdots + (k-1)(x_{k-1}+1) = n-1$. Nyt $x_{k-1} + 1 \geq 1$, joten tällaisia ratkaisuja on $p(k-1, n-1)$.

Täten $p(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k)$. □

Huomautus 2.5. Luvut $p(n, k)$, voidaan esittää kolmiona:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & p(1,1) & & & \\
 & & p(2,1) & & p(2,2) & & \\
 & p(3,1) & & p(3,2) & & p(3,3) & \\
p(4,1) & & p(4,2) & & p(4,3) & & p(4,4) \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 2 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 5 & & 5 & & 3 & & 2 & & 1 & & 1 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

missä keskimmäisen sarakkeen vasemmalla puolella olevat ykkösestä eroavat luvut lasketaan kaavalla $p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$ ja muut kaavalla $p(n,k) = p(n-1,k-1)$ $(n,k > 1)$.

Esimerkki 2.37. (a) Monellako tavalla kahdeksan samanlaista palloa voidaan sijoittaa neljään samanlaiseen lokeroon, jos jokaiseen lokeroon on on tultava vähintään yksi pallo?
(b) Entäpä jos lokeroita voi jäädä tyhjäksi?

Ratkaisu: (a) 8 samanlaista palloa voidaan sijoittaa neljään samanlaiseen lokeroon yhtä monella tavalla kuin luku 8 voidaan partitioida neljään nollasta eroavaan osaan eli $p(8,4) = 5$ tavalla.
(b) Sellaisia sijoitteluja joissa täsmälleen i lokeroa jää tyhjäksi on $p(8, 4-i)$ kpl, missä $0 \leq i \leq 3$. Siispä sellaisia sijoitteluja joissa lokeroita voi jäädä tyhjäksi on $p(8,1) + p(8,2) + p(8,3) + p(8,4) = 1 + 4 + 5 + 5 = 15$ kpl.

Edellisen esimerkin kohta (b) antaa aiheen seuraavaan määritelmään:

Määritelmä 2.5. Olkoot $k \in \mathbb{Z}_+$ ja $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Luvun *n partitio korkeintaan k:hon osaan* on mikä tahansa ehdot

(a) $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$,
(b) $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k$,

täyttävä kokonaislukumonikko $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Kaikkien tällaisten partitioiden lukumäärää merkitään symbolilla $T(n,k)$.

Lause 2.12. *Olkoot $k \in \mathbb{Z}_+$ ja $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

(a) *$T(n,k)$ on yhtälön $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + kx_k = n$ ei-negatiivisten kokonaislukuratkaisujen lukumäärä.*
(b) $T(n,k) = p(n+k,k) = \sum_{i=1}^{k} p(n,i)$,

Todistus. (a) Ks. Lemman 2.3 todistus. (b) Nyt siis yhtälöllä $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + kx_k = n$ on $T(n,k)$ ei-negatiivista kokonaislukuratkaisua. Muuttujanvaihto $x_k = y - 1$, missä $y \geq 1$, antaa yhtälön $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + ky = n + k$. Tällä on $p(n+k,k)$ ratkaisua. Siispä $T(n,k) = p(n+k,k)$. Yhtälö $T(n,k) = \sum_{i=1}^{k} p(n,i)$ seuraa suoraan $p(n,k)$:n ja $T(n,k)$:n määritelmästä. □

Esimerkki 2.38. Mainostaja haluaa ostaa mainosaikaa yhden, kolmen tai neljän minuutin paloissa. Monellako tavalla 20 minuuttia mainosaikaa voidaan jakaa näiden palojen kesken?

Ratkaisu: Tehtävänä on siis laskea yhtälön

$$x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 20$$

ei-negatiivisten kokonaislukuratkaisujen lukumäärä d.

Yhtälön $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20$ ei-negatiivisten kokonaislukuratkaisujen lkm on $T(20,4)$. Sellaisia ratkaisuja joissa $x_2 \geq 1$, on $T(20-2,4)$ kpl (muuttujanvaihto $x_2 = y+1$). Täten $d = T(20,4) - T(18,4) = p(24,4) - p(22,4) = 108 - 84 = 24$.

2.6. **Yhteenveto (pallot ja laatikot).** Tarkastellaan yhteenvetona n:n pallon sijoittamista k:hon laatikkoon. Vaihtoehtojen lukumäärä riippuu siitä (a) ovatko pallot samalaisia (b) ovatko laatikot samanlaisia (c) voiko laatikoita jäädä tyhjäksi:

pallot pareittain erilaisia	laatikot pareittain erilaisia	laatikoita voi jäädä tyhjäksi	lkm
+	+	+	k^n
+	+	-	$k!S(n,k)$

pallot pareittain erilaisia	laatikot samanlaisia	laatikoita voi jäädä tyhjäksi	lkm
+	+	+	$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)$
+	+	-	$S(n,k)$

pallot samanlaisia	laatikot pareittain erilaisia	laatikoita voi jäädä tyhjäksi	lkm
+	+	+	$\binom{n+k-1}{n}$
+	+	-	$\binom{n-1}{n-k}$

pallot samanlaisia	laatikot samanlaisia	laatikoita voi jäädä tyhjäksi	lkm
+	+	+	$T(n,k)$
+	+	-	$p(n,k)$

2.7. **Generoivat funktiot.** Tarkastellaan reaalilukujonoa $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Sen *generoiva funktio* on formaalinen potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. Formaalista potenssisarjaa voi ajatella vain vaihtoehtoisena esitystapana jonolle $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Jonon esittämisessä formaalina potenssisarjana on kuitenkin se etu, että formaalit potenssisarjat toteuttavat samat identiteetit kuin suppenevat potenssisarjat, ja että niillä voi laskea kuten polynomeilla. Erityisesti, niitä voidaan laskea yhteen ja kertoa kuten polynomeja, ja myös derivoida termeittän.

Esimerkki 2.39. Jonon $1, 1, 1, 1, \ldots$ generoiva funktio on geometrinen sarja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Esimerkki 2.40. Derivoimalla edellinen yhtälö saadaan

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2},$$

ja täten jonon $1, 2, 3, 4, \ldots$ generoiva funktio on $1/(1-x)^2$.

Kertomalla edellinen yhtälö puolittain x:llä saadaan

$$0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2},$$

ja täten jonon $0, 1, 2, 3, \ldots$ generoiva funktio on $x/(1-x)^2$.

Derivoidaan jälleen:

$$1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \cdots = \frac{x+1}{(1-x)^3},$$

ja täten jonon $1, 2^2, 3^3, 4^2, \ldots$ generoiva funktio on $(x+1)/(1-x)^3$.

Huomautus 2.6. Ylläesitetyt identiteetit ovat voimassa formaalien potenssisarjojen muodostaman renkaan osamääräkunnassa.

Esimerkki 2.41. Olkoon k ei-negatiivinen kokonaisluku. Minkä jonon $a_0, a_1, a_2 \ldots$ generoiva funktio on $f(x) = \frac{1}{(1-x)^k}$?

Ratkaisu: Nyt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdots \frac{1}{(1-x)} = \sum_{i_1=0}^{\infty} x^{i_1} \sum_{i_2=0}^{\infty} x^{i_2} \cdots \sum_{i_k=0}^{\infty} x^{i_k} \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_k=0}^{\infty} x^{i_1+i_2+\cdots+i_k} \\ &=: \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

missä a_n on yhtälön $i_1+i_2+\cdots+i_k = n$ ei-negatiivisten ratkaisujen lukumäärä. Siispä $f(x)$ on k-alkioisen joukon n-toistokombinaatioiden lukumäärät generoiva funktio, ts. $a_n = \binom{n+k-1}{n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Esimerkki 2.42. Ratkaistaan Esimerkki 2.28 uudelleen, nyt generoivien funktioiden avulla: monellako tavalla voidaan 24 samanlaista tehtävää jakaa neljälle tietokoneelle, jos kullekin koneelle on tultava $3-8$ tehtävää?

Ratkaisu: Olkoon a_n niiden tapojen lukumäärä joilla neljälle koneelle voidaan jakaa n tehtävää. Nyt siis a_n on ehdon $3 \leq y_i \leq 8$ $(i=1,\ldots,4)$ toteuttavien yhtälön $y_1+y_2+y_3+y_4=n$ kokonaislukuratkaisujen (y_1,y_2,y_3,y_4) lukumäärä.

Mikä on jonon a_n generoiva funktio? Havainto: kun sulkeet poistetaan tulossa

$$T := (x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)^4,$$

niin päädytään muotoa $x^{y_1}x^{y_2}x^{y_3}x^{y_4} = x^{y_1+y_2+y_3+y_4}$ olevien monomien summaan, missä kukin $3 \leq y_i \leq 8$. Siispä

a_n *on monomin* x^n *kerroin tulossa* T.

Siispä alkuperäiseen ongelman ratkaisemiseksi riittää laskea monomin x^{24} kerroin tulossa T. Ensinnäkin

$$(x^3+\cdots+x^8)^4 = x^{12}(1+x+\cdots+x^5)^4 = x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4,$$

joten on siis laskettava termin x^{12} kerroin tulossa

$$\begin{aligned}
&(1-x^6)^4(1-x)^{-4}\\
=&\left(1-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-+\cdots\right)\times\\
&\left(1+\binom{1+4-1}{1}x+\binom{2+4-1}{2}x^2+\cdots+\binom{12+4-1}{12}x^{12}+\cdots\right),
\end{aligned}$$

joka on

$$1\cdot\binom{12+4-1}{12}-\binom{4}{1}\binom{6+4-1}{6}+\binom{4}{2}\cdot 1 = \binom{15}{12}-4\binom{9}{6}+6\cdot 1 = 125.$$

Siispä tehtävät voidaan jakaa koneille 125 tavalla.

Esimerkki 2.43. Olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$. Lasketaan jonon $T(1,k), T(2,k), \ldots$ generoiva funktio $f(x)$, missä $T(n,k)$ on luvun n partitioiden lukumäärä korkeintaan k:hon osaan.

Lauseen 2.12 nojalla $T(n,k)$ on yhtälön $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + kx_k = n$ ei-negatiivisten kokonaislukuratkaisujen lukumäärä. Koska

$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)\cdots(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\cdots)\\
=&\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{i_k=0}^{\infty} x^{i_1+2i_2+\cdots+ki_k} = \sum_{n=0}^{\infty} T(n,k)x^n,
\end{aligned}
$$

niin

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^k)}.$$

Esimerkki 2.44. Olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$. Lasketaan jonon $p(1,k), p(2,k), \ldots$ generoiva funktio $g(x)$, missä $p(n,k)$ on luvun n partitioiden lukumäärä k:hon osaan.

Lauseen 2.11 nojalla $p(n,k) = 0$, jos $n < k$, ja Lauseen 2.12 nojalla $p(n+k,k) = T(n,k)$, joten

$$
\begin{aligned}
x^{-k}g(x) &= x^{-k}\sum_{n=k}^{\infty} p(n,k)x^n = \sum_{n=k}^{\infty} p(n,k)x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n+k,k)x^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} T(n,k)x^n = f(x).
\end{aligned}
$$

Siispä

$$g(x) = x^k f(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^k)}.$$