

DISKREETTI MATEMATIIKKA

1. RELAATIO JA FUNKTIO

1.1. Karteesinen tulo.

Sellaista kahden alkion a, b joukkoa, jossa alkioden järjestys on määrätty sanotaan *järjestetyksi pariksi*. Merkitään (a, b) . Järjestettyjen parien yhtäsuuruus siis määritellään näin:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d).$$

Yleisesti, jos alkiot a_1, a_2, \dots, a_n muodostavat joukon jossa alkioden järjestys on määrätty, sanotaan tällaista joukkoa *järjestetyksi n -jonoksi*, merkitään (a_1, \dots, a_n) .

Määritelmä 1.1. Joukkojen A_1, \dots, A_n karteesinen tulo

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

Sopimus: Merkitsemme karteesista tuloa $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ kertaa}} = A^n$

Esimerkki 1.1. Olkoot $A = \{x\}$, $B = \{1, 2\}$. Nyt $A \times B = \{(x, 1), (x, 2)\}$ ja $B \times A = \{(1, x), (2, x)\}$. Täten $A \times B \neq B \times A$.

Esimerkki 1.2. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

1.2. Relaatio ja funktio.

Määritelmä 1.2. Binäärinen relaatio joukosta A joukkoon B on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko R . Jos $A = B$ sanotaan, että R on *relaatio joukossa* A .

Esimerkki 1.3. Olkoon $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ja $B = \{2, 4, 6\}$. Relaatio $R = \{(x, y) \mid x + y = 9\}$ A :sta B :hen muodostuu järjestetyistä pareista $(3, 6), (5, 4), (7, 2)$. Siis $R = \{(3, 6), (5, 4), (7, 2)\}$.

Esimerkki 1.4. Relaatio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ joukossa \mathbb{R}^2 koostuu kaikista reaalisesta yksikköympyrän pisteistä.

Sopimus: Merkitään lyhyesti aRb jos $(a, b) \in R$.

Määritelmä 1.3. Olkoon R relaatio joukosta A joukkoon B . Relaation R *käänteisrelaatio* on relaatio

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Olkoon lisäksi S relaatio joukosta B joukkoon C . Relaatioiden R ja S *yhdistetty relaatio* on relaatio

$$S \circ R = \{(a, c) \mid (a \in A, c \in C) \wedge ((aRb) \wedge (bSc) \text{ jollakin } b \in B)\},$$

joukosta A joukkoon C .

Huomautus 1.1. $S \circ R$ muodostetaan siis seuraavasti: valitaan jokaista relaation R paria (a, b) kohti kaikki relaation S muotoa (b, c) olevat parit. Nyt $S \circ R$ on kaikkien tällaisten parien (a, c) muodostama joukko.

Esimerkki 1.5. Olkoot A, B ja $R = \{(3, 6), (5, 4), (7, 2)\}$ kuten esimerkissä 1.3. Olkoon $C = \{a, b, c\}$ ja $S = \{(2, a), (2, b), (6, c)\}$ relaatio B :stä C :hen. Nyt $S^{-1} = \{(a, 2), (b, 2), (c, 6)\}$ ja $S \circ R = \{(3, c), (7, a), (7, b)\}$.

Esimerkki 1.6. Relaation $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ käänteisrelaatio on A itse. Olkoon $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$. Nyt $B \circ A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$.

Määritelmä 1.4. *Funktio (tai kuvaus) f joukolta A joukkoon B* on sellainen relaatio joukosta A joukkoon B , jossa jokainen joukon A alkio on relaatiossa täsmälleen yhden joukon B alkion kanssa. Merkitään $f : A \rightarrow B$. Jos $(x, y) \in f$, niin merkitään $y = f(x)$.

Esimerkki 1.7. Relaatio $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ joukossa $A := \{1, 2, 3\}$ on funktio joukolta A joukkoon A . Relaatiot $\{(1, 1), (2, 2)\}$ ja $\{(1, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ eivät ole funktioita joukolta A joukkoon A .

Esimerkki 1.8. Relaatio $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = x^2\}$ joukossa \mathbb{R}^2 on funktio. Relaatio $\{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}, x = y^2\}$ ei ole funktio, sillä esim. $(1, 1)$ ja $(1, -1)$ kuuluvat siihen.

Kertauksena funktioihin liittyvää terminologiaa:

Määritelmä 1.5. Olkoon $f : A \rightarrow B$. $f(a)$ on alkion a *kuva kuvauksessa f* (tai f :n arvo pisteessä a). A on funktion f *määrittelyjoukko* ja B on funktion f *maalijoukko*. Joukko

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

on funktion f *kuvajoukko* (tai arvojoukko). Sitä merkitään myös symbolilla $Im f$.

Määritelmä 1.6. Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $A' \subseteq A, B' \subseteq B$. Joukon A' kuva (kuvauksessa f) on joukko

$$f(A') := \{f(a) \mid a \in A'\}.$$

Joukon B' alkukuva (kuvauksessa f) on joukko

$$f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$$

Huomautus 1.2. Yhden alkion joukon $\{b\}$ alkukuvaa merkitään tavallisesti symbolilla $f^{-1}(b)$, ja kutakin joukon $f^{-1}(b)$ alkioita sanotaan alkion b alkukuvaksi (kuvauksessa f).

Esimerkki 1.9. Tarkastellaan funktiota $g = \{(a, 1), (b, 1), (c, 3)\}$ joukolta $A = \{a, b, c\}$ joukkoon $B = \{1, 2, 3\}$. Nyt a :n kuva $g(a) = 1$, g :n kuvajoukko $g(A) = \{1, 3\}$, joukon $\{1, 2\}$ alkukuva $g^{-1}(\{1, 2\}) = \{a, b\}$, alkion 1 alkukuvat ovat a ja b ja $g^{-1}(1) = \{a, b\}$ ja alkion 2 alkukuvien joukko $g^{-1}(2) = \emptyset$.

Määritelmä 1.7. Funktio $f : A \rightarrow B$ on *injektio*, jos jokaisella joukon B alkiolla on korkeintaan yksi alkukuva kuvauksessa f . Se on *surjektio*, jos jokaisella joukon B alkiolla on vähintään yksi alkukuva. Se on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio ts. jokaisella joukon B alkiolla on täsmälleen yksi alkukuva.

Esimerkki 1.10. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 2$. Olkoon $y \in \mathbb{R}$. Yhtälöllä $y = 4x + 3$ on täsmälleen yksi ratkaisu, nimittäin $x = (y - 3)/4$. Täten f on bijektio.

Lause 1.1. Olkoon $f : A \rightarrow B$. Funktio f on injektio jos ja vain jos kaikille joukon A alkioille a, a' pätee $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.

Todistus. Oletetaan, että f on injektio. Oletetaan, että joillakin $a, a' \in A$ väitteen implikaatio ei päde. Silloin $f(a) = f(a')$ ja $a \neq a'$. Nyt alkiolla $f(a)$ on kaksi alkukuvaa, mikä on vastoin injektiivisyyden määritelmää. Siispä implikaatio on tosi.

Oletetaan, että väitteen implikaatio pätee. Tällöin pätee myös sen kontrapositio $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$. Täten jokaisella joukon B alkiolla on korkeintaan yksi alkukuva. □

Esimerkki 1.11. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$. Osoitetaan, että f on injektio. Oletetaan, että $f(a) = f(b)$. Nyt

$$\begin{aligned} a^3 + a + 1 &= b^3 + b + 1 && \Leftrightarrow \\ a^3 - b^3 &= b - a && \Leftrightarrow \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= b - a && \Leftrightarrow \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Täten $a - b = 0$ tai $a^2 + ab + b^2 + 1 = 0$. Näistä jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisua a sillä, sillä sen diskriminantti a :n suhteen $= -3b^2 - 4 < 0$. Täten $a = b$ ja f on injektio. Funktio f on myös surjektio, sillä jos $a \in \mathbb{R}$, niin $f(x) - a < 0$ riittävän pienellä x :n arvolla ja $f(x) - a > 0$ riittävän suurella x :n arvolla, ja koska f on jatkuva, niin $f(x_0) = a$ jollakin $x_0 \in \mathbb{R}$. Siispä f on bijektio.

Seuraavaksi annetaan funktioiden yhdistämiseen perustuvat riittävät ehdot surjektiiivisuuden ja injektiiivisyyden toteamiseksi. Funktioiden yhdistäminen tapahtuu seuraavasti: olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$. Silloin $g \circ f$ on funktio $A \rightarrow C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Tämä seuraa suoraan yhdistetyn relaation määritelmästä.

Lause 1.2. *Olkoot $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ funktioita. Silloin pätevät*

- (1) *Jos $g \circ f = id_A$ niin f on injektio,*
- (2) *Jos $f \circ g = id_B$ niin f on surjektio,*

missä id_A on A :n identiteettifunktio $A \rightarrow A$, $id_A(x) = x$ ja id_B on B :n identiteettifunktio.

Todistus. (1) $f(a) = f(a') \Rightarrow g(f(a)) = g(f(a')) \stackrel{g \circ f = id_A}{\Rightarrow} a = a'$.

(2) Olkoon $b \in B$. Nyt $f(a) = b$, kun valitaan $a = g(b)$, sillä $f \circ g = id_B$. □

Esimerkki 1.12. Olkoot f ja g funktioita $\mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$\begin{aligned} f(n) &= n + 1, \\ g(n) &= \begin{cases} 0 & \text{jos } n = 0, \\ n - 1 & \text{jos } n \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Nyt $g(f(n)) = g(n + 1) = n$, sillä $n + 1 \geq 1$. Näin ollen $g \circ f = id_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ja siispä f on injektio ja g on surjektio.

Määritelmä 1.8. Olkoon $f : A \rightarrow B$. Jos käänteisrelaatio f^{-1} joukosta B joukkoon A on funktio on se f :n *käänteisfunktio*.

Lause 1.3. Funktiolla f on käänteisfunktio silloin ja vain silloin kun f on bijektio.

Todistus. Olkoon $f = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b = f(a))\}$ ja $f^{-1} = \{(b, a) \mid (a \in A) \wedge (b = f(a))\}$. Nyt f^{-1} on funktio joss jokaista $b \in B$ vastaa täsmälleen yksi $a \in A$ jolle $f(a) = b$ joss f on bijektio. \square

Esimerkki 1.13. Esimerkin 1.10 käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = (x - 3)/4$. Esimerkin 1.11 funktiolla on käänteisfunktio f^{-1} , mutta sen laskeminen on hankalanpaa. Seuraavaan lauseeseen perustuen voidaan kuitenkin osoittaa, että

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{-6 + \sqrt[3]{2(27(y-1) + \sqrt{108 + 729(y-1)^2})^2}}{3\sqrt[3]{4(27(y-1) + \sqrt{108 + 729(y-1)^2})}}$$

Lause 1.4. Olkoon $f : A \rightarrow B$ and $g : B \rightarrow A$. Silloin g on funktion f käänteisfunktio jos ja vain jos $g \circ f = id_A$ ja $f \circ g = id_B$.

Huomautus 1.3. Tarvitsemme todistuksessa seuraavaa pientä havaintoa: funktion f ja sen käänteisrelaation $g = \{(f(x), x) \mid x \in A\}$ yhdistetty relaatio $g \circ f = \{(x, x') \mid x \in A \text{ ja } x' \in f^{-1}(f(x))\}$ ja yhdistetty relaatio $f \circ g = \{(f(x), f(x)) \mid x \in A\}$.

Todistus. Oletetaan, että g on f :n käänteisfunktio. Nyt $f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ ja $g = \{(f(x), x) \mid x \in A\}$. Koska g on injektio lauseen 1.3 nojalla, niin $g \circ f = \{(x, x) \mid x \in A\} = id_A$. Koska f on surjektio lauseen 1.3 nojalla, niin $f \circ g = \{(f(x), f(x)) \mid x \in A\} \stackrel{f \text{ surjektio}}{=} \{(y, y) \mid y \in B\} = id_B$.

Oletetaan nyt, että $g \circ f = id_A$ ja $f \circ g = id_B$ ja osoitetaan että $g = f^{-1}$ eli että $\{(y, g(y)) \mid y \in B\} = \{(f(x), x) \mid x \in A\}$. Olkoon $(y, g(y)) \in g$. Koska $f \circ g = id_B$, niin $y = f(g(y))$. Täten $(y, g(y)) = (f(g(y)), g(y)) = (f(x), x) \in f^{-1}$. Olkoon $(f(x), x) \in f^{-1}$. Koska $g \circ f = id_A$, niin $x = g(f(x))$. Täten $(f(x), x) = (f(x), g(f(x))) = (y, g(y)) \in g$. \square

Esimerkki 1.14. Olkoon $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{x-1}$. Helposti nähdään, että $g(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Täten f ei ole surjektio eikä sillä ole käänteisfunktiota. Olkoon nyt $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{x}{x-1}$. Koska

$$(f \circ f)(x) = \frac{f(x)}{f(x) - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x.$$

niin $f^{-1} = f$.

Esimerkki 1.15. Näimme että esimerkin 1.12 funktioille f ja g pätee $g \circ f = id_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. Nyt kuitenkin $f \circ g \neq id_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, sillä $f(g(0)) = f(0) = 1 \neq 0$. Täten funktiot f ja g eivät ole toistensa käänteisfunktioita.

Lopuksi äärellisten joukkojen välisiä kuvauksia koskeva tulos:

Lause 1.5. *Olkoon $f : A \rightarrow B$ ja $|A| = |B| < \infty$.*

- (1) *Jos f on injektio, niin se on bijektio.*
- (2) *Jos f on surjektio, niin se on bijektio.*

Todistus. (1) Jos f on injektio, niin $|f(A)| = |A| = |B|$. Täten f on myös surjektio.

(2) Oletetaan, että f on surjektio. Koska $A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$, missä $f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b') = \emptyset$ aina kun $b \neq b'$, niin $|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)|$. Koska f on surjektio, niin $|f^{-1}(b)| \geq 1$ kaikilla $b \in B$. Mutta $|A| = |B|$ joten $|f^{-1}(b)| = 1$ kaikilla $b \in B$. Täten f on injektio. \square

2. KOMBINATORIIKKA

Tällä kursilla kombinatoriikalla tarkoitetaan lukumäärien laskemista äärellisissä joukoissa. Sovellusalueita:

- algoritmien analysointi
- todennäköisyyslaskenta
- tilastotiede
- virheitä korjaavien koodien teoria
- laadunvalvonta
- perinnöllisyystiede

Seuraavaksi muutama valmistava esimerkki:

Esimerkki 2.1. Matti ja Teppo pelaavat tenniksessä otteluserjan jonka voittaa se, joka ensiksi voittaa kaksi peräkkäistä ottelua tai kolme ottelua. Montako erilaista otteluserjaa on olemassa?

Ratkaisu: Liitetään pelattuun otteluun symboli 1 jos Matti voitti, ja 0 jos Teppo voitti. Havainto: otteluserja voi olla korkeintaan viiden ottelun mittainen. Otteluserjat joissa Teppo voittaa ensimmäisen pelin: 00, 011, 0100, 01010, 01011. Täten mahdollisia otteluserjoja on 10 kpl.

Esimerkki 2.2. n tenniksen pelaajaa pelaa ottelusarjan, jossa kullakin kierroksella arvotaan pelaavat parit, ja seuraavalle kierrokselle pääsevät parien voittajat. Jos jollakin kierroksella on pariton määrä pelaajia, pääsee arvonnassa paritta jäänyt suoraan seuraavalle kierrokselle. Montako ottelua on pelattava, jotta löydetään ottelusarjan voittaja?

Ratkaisu: Kun ottelusarja on pelattu, on yksi pelaaja jäljellä, nimittäin voittaja. Täten $n - 1$ kpl pelaajaa on pudonnut ottelusarjan kuluessa. Siispä pelejä on pelattu $n - 1$ kpl.

2.1. Tulo- ja summaoperaatio.

Esimerkki 2.3.

- (1) Montako 3-pituista merkkijonoa voidaan muodostaa kirjaimista a, b, c, d ?
- (2) Entäpä jos kukin merkki saa esiintyä vain kerran?

Ratkaisu:

- (1) Ensimmäinen merkki voidaan valita neljällä tavalla. Jokaista tällaista merkkiä kohti toinen merkki voidaan valita neljällä tavalla. Siis 2-pituisia merkkijonoja on $4 \cdot 4$ kpl. Jokaista tällaista merkkijonoa kohti kolmas merkki voidaan valita neljällä tavalla. Siis 3-pituisia merkkijonoja on $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ kpl.
- (2) Jälleen ensimmäinen merkki voidaan valita neljällä tavalla, mutta toinen merkki vain kolmella ja kolmas merkki kahdella tavalla. Vastaus: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ kpl.

Edellisen esimerkin yleistykseenä saadaan:

Tuloperiaate: Oletetaan että valintatehtävä voidaan jakaa n :ään toisistaan riippumattomaan vaiheeseen ja 1. vaiheessa valinta voidaan suorittaa k_1 tavalla, 2. vaiheessa k_2 tavalla, ..., n . vaiheessa k_n tavalla. Silloin valintatehtävä voidaan suorittaa $k_1 k_2 \cdots k_n$ tavalla.

Esimerkki 2.4. Merkitään $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Kuinka monta järjestettyä n -jonoa kuuluu joukkoon \mathbb{F}_2^n ?

Ratkaisu: Tuloperiaatteen nojalla jonoja on $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_n = 2^n$ kpl.

Määritelmä 2.1. Olkoon A joukko jossa on n alkioita, ja olkoon $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq n$. Joukon A k -permutaatio on sellainen k -jono (a_1, a_2, \dots, a_k) , jossa $a_i \neq a_j$ aina kun $i \neq j$. Jos $k = n$, niin k -permutaatiota sanotaan *permutaatioksi*.

Lause 2.1. n -alkioisen joukon k -permutaatioiden lukumäärä

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Erityisesti, permutaatioiden lukumäärä

$$P(n, n) = n!.$$

Todistus. Jonossa (a_1, \dots, a_k) ensimmäinen komponentti voidaan valita n , toinen komponentti $n-1, \dots$, ja k :s komponentti $n-k+1$ tavalla. Tuloperiaate:

$$P(n, k) = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

□

Esimerkki 2.5. Montako osajoukkoa on n -alkioisella joukolla?

Ratkaisu: Kahden alkion joukon $\{a, b\}$ osajoukot ovat $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$; näitä vastaavat 2-pituiset bittivektorit $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$. Kolmen alkion joukon $\{a, b, c\}$ osajoukot ovat $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$; näitä vastaavat 3-pituiset bittivektorit $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$.

Vastaavasti n -alkioisen joukon A osajoukkojen ja n -pituisten bittivektorien välille saadaan bijektiivinen vastaavuus: kuvataan kukin k :n alkion osajoukko $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ bittivektoriksi jossa on ykkönen täsmälleen niissä paikoissa joiden indeksit ovat i_1, i_2, \dots, i_k .

Siispä Esimerkin 2.4 nojalla n -alkioisen joukon osajoukkojen lukumäärä on 2^n .

Esimerkki 2.6. Olkoon A m -alkioinen ja B n -alkioinen joukko. Montako

- (1) relaatiota on joukosta A joukkoon B ?
- (2) funktioita on joukolta A joukkoon B ?
- (3) injektioita on joukolta A joukkoon B ?

Ratkaisu:

- (1) Karteesisessa tulossa $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ on tuloperiaatteen nojalla mn alkioita. Nyt Esimerkin 2.5 nojalla joukolla $A \times B$ on 2^{mn} osajoukkoa. Täten relatioita joukosta A joukkoon B on 2^{mn} kpl.
- (2) Olkoon $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Funktioita $f = \{(a_1, f(a_1)), \dots, (a_m, f(a_m))\}$ on sama määrä kuin vektoreita $(f(a_1), \dots, f(a_m))$. Kukin arvoista $f(a_i)$ voidaan valita n tavalla, joten tuloperiaatteen nojalla funktioita joukolta A joukkoon B on $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{m \text{ kpl}} = n^m$ kpl.
- (3) Jos f on injektio, niin $m = |f(A)| \leq n$. Siispä:
 - (a) Jos $m > n$ niin ei ole olemassa injektiota $A \rightarrow B$.
 - (b) Jos $m \leq n$, niin jono $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m))$ voidaan valita $n \cdot (n - 1) \cdots (n - m + 1) = P(n, m)$ tavalla eli injektioita on tapauksessa $m \leq n$ $P(n, m)$ kpl.

Summaperiaatteeseen johdutaan seuraavan esimerkin kautta.

Esimerkki 2.7. Tietokoneen salasanassa on 6-10 merkkiä aakkostosta

$$\mathcal{A} = \{a, A, b, B, \dots, z, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

- (1) Montako tällaista salasanaa voidaan muodostaa?
- (2) Montako sellaista salasanaa voidaan muodostaa, jossa yksikään merkki ei toistu?
- (3) Montako sellaista salasanaa voidaan muodostaa, jossa jokin merkki toistuu?

Ratkaisu:

- (1) Tuloperiaatteen nojalla k -pituisia merkkijonoja on 62^k kappaletta. Täten 6-10 pituisia salasanoja on $62^6 + 62^7 + 62^8 + 62^9 + 62^{10} = 62^{10}(62^5 - 1)/61$ ($\simeq 1.26 \times 10^{25}$) kpl.
- (2) Sellaisten k -pituisten salasanojen lukumäärä jossa yksikään merkki ei toistu on $P(62, k)$. Täten sellaisia 6-10 pituisia salasanoja joissa yksikään merkki ei toistu on

$$P(62, 6) + P(62, 7) + P(62, 8) + P(62, 9) + P(62, 10) = 397665153770704560$$

$$\simeq 3.98 \times 10^{17} \text{ kpl.}$$

(3) Vastaus: $62^{10}(62^5 - 1)/61 - 397665153770704560 \simeq 1.26 \times 10^{25}$ kpl.

Summaperiaate: Olkoon A pareittain erillisten joukkojen yhdiste ts.

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_k,$$

missä $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina kun $i \neq j$. Silloin A :sta voidaan valita alkio $|A_1| + \dots + |A_k|$ tavalla.

2.2. Kombinaatiot ja toistokombinaatiot.

Tarkastellaan seuraavaksi valintatehtäviä, joissa valittujen objektien keskinäisellä järjestyksellä ei ole merkitystä.

Esimerkki 2.8. Monellako tavalla kymmenen ihmisen joukosta voidaan valita kolmen hengen työryhmä?

Ratkaisu: Olkoon kysytty lukumäärä x . Jokaisesta valitusta työryhmästä saadaan 3-permutaatioita $3! = 6$ kpl. Toisaalta, näin saadaan kaikki ko. ihmisjoukon 3-permutaatiot. Siispä $6x = P(10, 3)$ eli kolmen hengen työryhmä voidaan valita

$$\frac{P(10, 3)}{3!} = \frac{10!}{(10 - 3)!3!}$$

tavalla.

Määritelmä 2.2. Olkoon A joukko jossa on n alkioita. Jokainen A :n k -alkioinen osajoukko on sen k -kombinaatio.

Edellinen esimerkki yleistyy välittömästi seuraavaksi lauseeksi:

Lause 2.2. Jokaisesta n :n alkion joukosta voidaan valita k -kombinaatio täsmälleen

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n - k)!k!}$$

tavalla.

Lukuja $\binom{n}{k}$ sanotaan *binomikertoimiksi*.

Esimerkki 2.9.

(1) Montako ehdon $1 \leq a < b < c \leq 10$ toteuttavaa kokonaislukukolmikkoo (a, b, c) voidaan muodostaa?

- (2) Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja k ehdon $1 \leq k \leq n$ toteuttava kokonaisluku. Montako ehdon $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ toteuttavaa k -jonoa (i_1, i_2, \dots, i_k) voidaan muodostaa?

Ratkaisu:

- (1) Ehdon $1 \leq a < b < c \leq 10$ toteuttavat kolmikot (a, b, c) ovat bijektivisessä vastaavuudessa 3-kombinaatioiden $\{a, b, c\}$ kanssa. Täten kyseessä olevia kolmikoita on $\binom{10}{3}$ kpl.
- (2) Kyseessä olevia k -jonoja on täsmälleen sama määrä kuin n -alkioisen joukon k -kombinaatioita eli $\binom{n}{k}$ kpl.

Tarkastellaan seuraavaksi tehtävää jonka ratkaisemiseksi on yhdistettävä tulo- ja summaoperaate sekä kombinaatioiden laskeminen.

Esimerkki 2.10. Valitaan uudet pää-, ulko-, valtiovarain-, opetus- ja sisäministeri. Pääministeriksi on tarjolla kaksi naista ja yksi mies. Loput ministerit valitaan neljän naisen ja neljän miehen joukosta, joita ei voi valita pääministeriksi. Monellako tavalla valinta voidaan tehdä, jos ministereistä kolmen on oltava nainen?

Ratkaisu: Oletetaan ensin että pääministeriksi valitaan nainen. Nyt pääministeri voidaan valita kahdella tavalla. Muut kaksi naisten ministerin postia voidaan valita joukosta $\{\text{ulko, valtiovarain, opetus, sisä}\} \binom{4}{2} = 6$ tavalla, ja näihin virkoihin voidaan valita nainen $4 \cdot 3 = 12$ tavalla. Jäljellä oleviin virkoihin valitaan mies $4 \cdot 3 = 12$ tavalla. Tuloperiaate: Sellaisia valintoja joissa pääministeriksi valitaan nainen on $2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ kpl.

Oletetaan sitten, että pääministeriksi valitaan mies. Nyt pääministeri voidaan valita yhdellä tavalla. Kolme naisten ministerin postia voidaan valita $\binom{4}{3} = 4$ tavalla, ja näihin virkoihin voidaan valita nainen $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ tavalla. Jäljellä olevaan virkaan voidaan valita mies neljällä tavalla. Tuloperiaate: Sellaisia valintoja joissa pääministeriksi valitaan mies on $1 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 4 = 384$ kpl.

Summaoperaate: valinta jossa kolme ministereistä on naisia voidaan tehdä $1728 + 384 = 2112$ tavalla.

Binomikertoimien ominaisuuksia:

Koska tulo x^i voidaan muodostaa valitsemalla tulossa $(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ n :stä mahdollisesta x :stä i kpl, ja tämän jälkeen tulo y^j voidaan muodostaa valitsemalla $(n-i)$:stä mahdollisesta y :stä j kpl, niin

$$a_{i,j} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{j}.$$

Koska

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{j} = \frac{n!}{i!j!(n-(i+j))!} = \frac{n!}{i!j!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i},$$

niin

$$(x+y)^n = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=n}} \binom{n}{i} x^i y^j = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

□

Sopimus: $0^0 = 1$.

Esimerkki 2.11. Newtonin binomilauseen ja Pascalin kolmion nojalla

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Newtonin binomilause yleistyy välittömästi multinomilauseeksi.

Lause 2.5 (Multinomilause). *Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{C}$. Silloin*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \cdots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k},$$

missä

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Todistus. Ks. binomilauseen todistus. □

Lukuja $\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$ sanotaan *multinomikertoimiksi*.

Esimerkki 2.12. Lasketaan $(a+b+c)^2$. Seuraavassa taulukossa on luetteloitu kaikki yhtälön $i+j+k=2$ ei-negatiiviset kokonaislukuratkaisut sekä vastaavat multinomikertoimet ja monomit:

i	j	k	$\binom{2}{i,j,k}$	$a^i b^j c^k$
2	0	0	1	a^2
0	2	0	1	b^2
0	0	2	1	c^2
1	1	0	2	ab
1	0	1	2	ac
0	1	1	2	bc

Nyt multinomilauseen nojalla

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

Huomautus 2.2. Multinomilause (ja täten erityisesti binomilause) pätee myös silloin kun \mathbb{C} korvataan millä tahansa kommutatiivisella renkaalla.

Yleisesti johdumme multinomikertoimiin seuraavan tyyppisissä tehtävissä:

Lause 2.6. Olkoot n_1, n_2, \dots, n_k ei-negatiivisia kokonaislukuja ja $n = n_1 + \dots + n_k$. Silloin n -alkioinen joukko A voidaan jakaa pareittain erillisten n_i -alkioisten osajoukkojen A_i yhdisteeksi

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_k$$

täsmälleen $\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$ tavalla.

Todistus. A_1 voidaan valita $\binom{n}{n_1}$ tavalla. Tämän jälkeen A_2 voidaan valita $\binom{n-n_1}{n_2}$ tavalla jne. Tuloperiaatteen nojalla koko valintatehtävä voidaan suorittaa

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-(n_1+\dots+n_{k-1})}{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

tavalla. □

Esimerkki 2.13. Kalevan kisojen 200 metrin juoksuun osallistuu 23 kilpailijaa, jotka jaetaan kolmeen alkuerään: 1. ja 2. erään 8 juoksijaa, ja 3. erään 7 juoksijaa. Monellako tavalla jako voidaan tehdä?

Ratkaisu: 23 alkion joukko voidaan jakaa pareittain erisuurien 8-,8- ja 7-alkioisen osajoukon yhdisteeksi täsmälleen $\binom{23}{8,8,7} = \frac{23!}{8!8!7!} = 3155170590$ tavalla.

Esimerkki 2.14.

- (1) Montako erilaista sanaa saadaan sanasta MISSISSIPPI kirjainten järjestystä vaihtamalla?
- (2) Montako sellaista sanaa saadaan joissa ei esiinny peräkkäisiä I-kirjaimia?

Ratkaisu:

- (1) Tehtävänä on siis kirjaimien M,I,S,S,I,S,S,I,P,P,I sijoittaminen 11 paikkaan. Nämä paikat muodostavat 11-alkioisen A joukon jonka jaamme neljän pareittain erisuuren osajoukkon A_M , A_I , A_S ja A_P yhdisteeksi, missä $|A_M| = 1$, $|A_I| = 4$, $|A_S| = 4$ ja $|A_P| = 2$. Tämä jako voidaan tehdä

$$\binom{11}{1, 4, 4, 2} = \frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650$$

tavalla. Vastaus: 34650 sanaa.

- (2) Sanoja joissa I-kirjainta ei esiinny saadaan $\binom{7}{1,4,2}$ kpl. Eräs tällainen sana on $_M_S_S_S_P_P_S_$, jossa I-kirjain voidaan sijoittaa merkin $_$ osoittamiin paikkoihin. Täten neljä I:tä voidaan sijoittaa $\binom{8}{4}$ paikkaan ja niinpä sellaisia sanoja joissa ei ole peräkkäisiä I-kirjaimia on $\binom{7}{1,4,2} \binom{8}{4} = 1050$ kpl

2.2.1. *Toistokombinaatiot.*

Lauseen 2.1 nojalla n -alkioisesta joukosta voidaan valita k alkioita $\binom{n}{k}$ tavalla. Tarkastellaan seuraavassa vastaavaa valintatehtävä; kun valittu alkio palautetaan aina takaisin joukkoon.

Esimerkki 2.15. Laatikossa on punainen (P), sininen (S) ja valkoinen (V) pallo. Suoritetaan kaksi nostoa ja palautetaan aina nostettu pallo takaisin laatikkoon. Montako nostojakaumaa on olemassa?

Ratkaisu: Mahdolliset jakaumat on luetteloitu alla olevassa taulukossa, missä esim. neljäs rivi tarkoittaa jakaumaa ”yksi punainen pallo ja yksi sininen pallo”:

P	S	V
2	0	0
0	2	0
0	0	2
1	1	0
1	0	1
0	1	1

Täten kysytyjä jakaumia on 6 kpl.

Määritelmä 2.3. n -alkioisen joukon $\{a_1, \dots, a_n\}$ k -toistokombinaatio (tai k -jakauma) on joukko $\{(m_1, a_1), (m_2, a_2), \dots, (m_n, a_n)\}$, missä $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ja $m_1 + m_2 + \dots + m_n = k$.

Huomautus 2.3. Määritelmästä seuraa että n -alkioisen joukon k -toistokombinaatiot ovat bijektiivisessä vastaavuudessa sellaisten n -monikkojen (x_1, \dots, x_n) kanssa, missä $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ ja $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ kaikilla $i = 1, \dots, n$.

Montako k -toistokombinaatiota on n -alkioisella joukolla? Tähän kysymykseen vastataan kohta. Todistetaan ensin pieni aputuloks:

Lemma 2.1. *Olkoot k ja n ei-negatiivisia kokonaislukuja. Aakkostosta $\{o, |\}$ voidaan muodostaa täsmälleen $\binom{n+k-1}{n-1}$ muotoa*

$$|\underbrace{oo\dots o}_{x_1 \text{ kpl}}|\underbrace{oo\dots o}_{x_2 \text{ kpl}}|\dots|\underbrace{oo\dots o}_{x_n \text{ kpl}}|$$

olevaa merkkijonoa, missä $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.

Todistus. Ko. merkkijonoja varten tarvitaan k paikkaa symbolille o ja $n+1$ paikkaa symbolille $|$. Koska ensimmäisen ja viimeisen $|$:n paikat ovat kiinnitetyt, niin lopuille $n-1$ symbolille $|$ voidaan valita paikka $\binom{n+k-1}{n-1}$ tavalla, ja loput paikat täytetäänkin sitten symboleilla o . \square

Seuraus 2.1. *Yhtälöllä $x_1 + \dots + x_n = k$ on täsmälleen $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ ei-negatiivista kokonaislukuratkaisua (x_1, \dots, x_n) (ts. $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ kaikilla $i = 1, \dots, n$.)*

Lause 2.7. *n -alkioisen joukon k -toistokombinaatioiden lukumäärä on $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.*

Todistus. Yhtälöllä $x_1 + \dots + x_n = k$ on $\binom{n+k-1}{n-1}$ ei-negatiivista kokonaislukuratkaisua Seurauksen 2.1 nojalla. Väite seuraa nyt Huomautuksesta 2.3. \square

Esimerkki 2.16.

- (1) Monellako tavalla voidaan jakaa seitsemän omenaa ja kaksi banaania neljälle lapselle?
- (2) Entäpä jos asetetaan lisäehto, että jokaisen lapsen on saatava vähintään yksi omena?

Ratkaisu:

- (1) Yhtälöllä $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ on $\binom{4+7-1}{7} = 120$ ei-negatiivista kokonaislukuratkaisua. Täten omenat voidaan jakaa 120 tavalla. Vastaavasti banaanit voidaan jakaa $\binom{4+2-1}{2} = 10$ tavalla. Tuloperiaatteen nojalla omenat ja banaanit voidaan jakaa lapsille $120 \cdot 10 = 1200$ tavalla.

- (2) Nyt etsimme yhtälön $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ kokonaislukuratkaisujen (x_1, x_2, x_3, x_4) lukumäärää missä kukin $x_i \geq 1$. Muuttujien vaihto $y_i = x_i - 1$ johtaa ekvivalenttiin yhtälöön $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7 - 4$, $y_i \geq 0$. Seurauksen 2.1 nojalla omenat voidaan jakaa $\binom{4+7-4-1}{7-4} = 20$ tavalla, ja täten omenat ja banaanit $20 \cdot 10 = 200$ tavalla.

Esimerkki 2.17. Tietoliikenneviesti koostuu 12 eri symbolista. Se lähetetään kanavaan siten, että kahden peräkkäisen symbolin välissä on vähintään 3 blankoa. Monellako tavalla viesti voidaan lähettää kanavaan, jos yhteensä 45 blankoa käytetään?

Ratkaisu: Merkitään viestissä niitä paikkoja joihin tulee blanko symbolilla \circ , ja niitä paikkoja joihin tulee viestisymboli symbolilla $|$. Nyt tarkasteltavat merkkijonot ovat muotoa

$$|\underbrace{\circ \circ \cdots \circ}_{x_1 \text{ kpl}} | \underbrace{\circ \circ \cdots \circ}_{x_2 \text{ kpl}} | \cdots | \underbrace{\circ \circ \cdots \circ}_{x_{11} \text{ kpl}} |$$

missä $x_1 + \cdots + x_{11} = 45$ ja $x_i \geq 3$. Muuttujien vaihdolla $y_i = x_i - 3$ päädyimme ekvivalenttiin yhtälöön $y_1 + \cdots + y_{11} = 45 - 11 \cdot 3 = 12$, $y_i \geq 0$. Seurauksen 2.1 nojalla tällä yhtälöllä on $\binom{11+12-1}{12} = \binom{22}{12}$ ratkaisua, ja täten ko. merkkijonoja on $\binom{22}{12}$ kpl. Täten annettu tietoliikenneviesti voidaan lähettää $\binom{22}{12} 12! \simeq 3.097 \times 10^{14}$ tavalla. tavalla.

Esimerkki 2.18. (Vertaa Esimerkkiin 2.9)

- (1) Montako ehdon $1 \leq a \leq b \leq c \leq 10$ toteuttavaa kokonaislukukolmikkoo (a, b, c) voidaan muodostaa?
- (2) Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja k ehdon $1 \leq k \leq n$ toteuttava kokonaisluku. Montako ehdon $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ toteuttavaa k -jonoa (i_1, i_2, \dots, i_k) voidaan muodostaa?

Ratkaisu:

- (1) Esimerkiksi kolmikkoo (a, a, c) vastaa joukon $\{1, 2, \dots, 10\}$ toistokombinaatio $\{(2, a), (0, b), (1, c)\}$. Näin saadaan bijektiivinen vastaavuus kolmikkojen ko. (a, b, c) ja joukon $\{1, 2, \dots, 10\}$ 3-toistokombinaatioiden välille. Siispä ko. kolmikoita on $\binom{10+3-1}{3} = 240$ kpl.
- (2) Kyseessä olevia k -jonoja on täsmälleen sama määrä kuin n -alkioisen joukon k -toistokombinaatioita eli $\binom{n+k-1}{k}$ kpl (Lause 2.7).

Esimerkki 2.19. Montako kertaa seuraava ohjelma tulostaa sanan VY.

```
for i:=1 to 100 do
  for j:=1 to i do
    for k:=1 to j do
      Print("VY")
```

Ratkaisu: Sana VY tulostetaan täsmälleen niin monta kertaa kuin on kolmikoita $1 \leq k \leq j \leq i \leq 100$. Esimerkin 2.18 nojalla sana VY tulostetaan siis $\binom{100+3-1}{3} = 171700$ kertaa.

2.3. Lokeroperiaate.

Seuravaalla havainnolla on yllättävän paljon epätriviaaleja sovelluksia:

Lokeroperiaate: Jos m esinettä sijoitetaan n :ään lokeroon ja $m > n$, niin johonkin lokeroon tulee vähintään kaksi esinettä.

Esimerkki 2.20. Sokealla miehellä on laatikossa 10 harmaata ja 10 mustaa sukkaa. Kuinka monta sukkaa hänen täytyy ottaa laatikosta, jotta niiden joukossa olisi varmasti kelvollinen pari?

Ratkaisu: Lokerot: harmaa ja musta, esineet: nostetut sukat. Lokeroperiaatteen mukaan riittää nostaa kolme sukkaa.

Esimerkki 2.21. Onko Helsingissä kaksi ihmistä joilla on tarkalleen yhtä monta hiusta päässään.

Ratkaisu: Ihmisellä on korkeintaan 60000 hiusta. Lokerot: eri hiuslukumäärät, esineet: helsinkiläiset. Koska esineitä on enemmän kuin lokeroita, niin lokeroperiaatteen nojalla vastaus on kyllä.

Lokeroperiaattetta voidaan hivenen yleistää:

Yleistetty lokeroperiaate: Olkoon $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina kun $i \neq j$. Jos $|A| \geq kn + 1$, niin ainakin yhdelle osajoukolle pätee $|A_i| \geq n + 1$.

Todistus. Jos $|A_i| \leq n$ kaikilla $i = 1, \dots, k$, niin $|A| \leq kn$. □

Esimerkki 2.22. Sokean miehen sukkalaatikossa on nyt sukkaa viittä eri väriä. Kuinka monta sukkaa on otettava, jotta saataisiin varmasti jotakin väriä kaksi paria?

Ratkaisu: Lokerot: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (sukkien värit), esineet: nostetut sukat. Jossakin joukoista A_i on oltava vähintään $4 = n + 1$ sukkaa. Riittää siis nostaa $5 \cdot (4 - 1) + 1 = 16$ sukkaa.

Esimerkki 2.23. Osoita että kuuden ihmisen joukossa on aina sellainen kolmikko, jossa joko kaikki ovat keskenään ystäviä tai kukaan ei ole kenenkään ystävä.

Ratkaisu: Otetaan henkilö A erilleen muista. Kaksi lokeroa: A :n ystävät, A :n ei-ystävät; esineet muut viisi henkilöä. Yleistetyn lokeroperiaatteen nojalla jommassa kummassa lokerossa on vähintään kolme henkilöä.

Oletetaan ensin että tämä lokero on A :n ystävien lokero. Jos ko. lokerossa olevista yksikään pari ei ole keskenään ystäviä, olemme löytäneet ei-ystäväkolmikon. Jos jokin pari C, D on muodostuu ystävyksistä, niin olemme löytäneet ystäväkolmikon A, B, C .

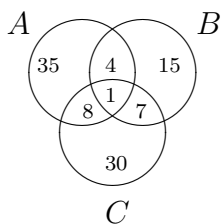
Tapaus jossa kolme henkilöä kuuluu A :n ei-ystävien lokeroon, käsitellään lähes samoin: jos ko. lokerossa kaikki ovat keskenään ystäviä olemme löytäneet ystäväkolmikon. Jos taas jokin pari C, D muodostuu ei-ystävistä, niin olemme löytäneet ei-ystäväkolmikon A, B, C .

2.4. Seulaperiaate.

Esimerkki 2.24. Yliopistossa on 1543 opiskelijaa, joista 35 pelaa jalkapalloa, 15 pelaa koripalloa ja 30 pelaa jääkiekkoa. Edelleen 4 pelaa sekä jalka- että koripalloa, 8 sekä jalkapalloa että jääkiekkoa, 7 sekä koripalloa että jääkiekkoa ja 1 pelaa kaikkia kolmea.

- (1) Kuinka moni pelaa ainakin jotakin?
- (2) Moniko ei pelaa mitään?

Ratkaisu: Seuraava kuva havainnollistaa tilannetta:



(1) Vastaus: $35 + 15 + 30 - 4 - 8 - 7 + 1 = 62$

(2) Vastaus: $1543 - 62 = 1481$

Seulaperiaate kahdelle ja kolmelle äärelliselle joukolle:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Yleisesti:

Lause 2.8. *Olko A_1, \dots, A_n äärellisiä joukkoja. Silloin*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| = & \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & - + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Todistus. Olkoon $x \in A := A_1 \cup \dots \cup A_n$, ja olkoon s niiden osajoukkojen A_i lukumäärä joihin x kuuluu. Nyt kukin tällainen x tulee lasketuksi mukaan $s - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} - + \dots + (-1)^{s-1} \binom{s}{s}$ kertaa väitteen oikeassa puolessa. Koska Newtonin binomikaavan nojalla

$$0 = (-1 + 1)^s = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} (-1)^i = 1 - s + \binom{s}{2} - \binom{s}{3} + \dots + (-1)^s \binom{s}{s},$$

niin kukin $x \in A$ lasketaan mukaan väitteen oikeassa puolessa täsmälleen kerran. \square

Esimerkki 2.25. n opiskelijaa menee Diskreetin Matematiikan tenttiin ja jättää takkinsa naulakkoon. Lähtiessään tentistä opiskelijat ovat sen verran pökerryksissä, että kukin ottaa umpimähkään yhden takin. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi opiskelija saa oman takkinsa?

Ratkaisu: Olkoon a sellaisten takkien jakojen lukumäärä jossa ainakin yksi takki osuu oikealle henkilölle, ja olkoon b kaikkien mahdollisten jakojen lukumäärä. On siis laskettava suhde a/b .

Mahdollisia jakoja vastaavat kaikki joukon $\{1, \dots, n\}$ permutaatiot (j_1, \dots, j_n) , joten $b = n!$.

Olkoon A_i niiden permutaatioiden joukko joissa i :s takki on omalla paikallaan, ts. $j_i = i$. Nyt $a = |A_1 \cup \dots \cup A_n|$ ja laskemme a :n käyttäen seulaperiaatetta. Ensinnäkin $|A_i| = (n-1)!$ sillä nyt i :s takki on paikallaan ja muut $n-1$ voivat olla missä tahansa järjestyksessä. Toiseksi $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ eli i :s ja j :s takki paikallaan, muut sekaisin, ja tällaisia termejä on summassa $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$ Esimerkin 2.9 nojalla $\binom{n}{2}$ kpl.

Yleisesti: $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$ ja summassa

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

on $\binom{n}{k}$ termiä, jälleen Esimerkin 2.9 nojalla. Nyt seulaperiaatteen nojalla

$$\begin{aligned} a &= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n}(n-n)! \\ &= \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! - \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n!}{n!0!}0! \\ &= n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right). \end{aligned}$$

Täten kysytty todennäköisyys

$$\frac{a}{b} = - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Kun n lähestyy ääretöntä, niin a/b lähestyy arvoa $1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - 1/e \simeq 0.632$. Huomaa, että jo 9 henkilön tapauksessa $a/b \simeq 1 - 1/e$ kuuden desimaalin tarkkuudella.

2.5. Partitiot.

Tarkastellaan seuraavaaksi kysymystä monellako tavalla n -alkiainen joukko voidaan partitoida k :n epätyhjän osajoukon yhdisteeksi eli etsimme esityksiä $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, missä kukin A_i on epätyhjä ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina kun $i \neq j$. Lisäksi yhdisteeseen kuuluvien osajoukkojen keskinäisellä järjestyksellä ei ole merkitystä.

Esimerkki 2.26. Joukon $A = \{a, b, c, d\}$ partitiot kahden epätyhjän osajoukon yhdisteeksi ovat $\{a\} \cup \{b, c, d\}$, $\{b\} \cup \{a, c, d\}$, $\{c\} \cup \{a, b, d\}$, $\{d\} \cup \{a, b, c\}$, $\{a, b\} \cup \{c, d\}$, $\{a, c\} \cup \{b, d\}$, $\{a, d\} \cup \{b, c\}$.

Esimerkki 2.27. Montako sellaista 2×4 bittimatriisia on olemassa, joissa kullakin rivillä on vähintään yksi ykkönen, ja jonka jokaisella sarakeella on täsmälleen yksi ykkönen.

Ratkaisu: Liitetään kuhunkin joukon $A = \{a, b, c, d\}$ osajoukkoon 4-pituinen bit-tivektori Esimerkin 2.5 mukaisesti. Nyt kutakin joukon A partitiota kahden epätyhjän joukon yhdisteeksi vastaa rivien permutaatioiden lukumäärän (eli $2!$) verran ko. matriiseja: ehto ”kullakin rivillä ykkönen” tarkoittaa sitä, että vastaavat osajoukot ovat epätyhjiä, ja ehto ”kullakin sarakeella täsmälleen yksi ykkönen” sitä, että kukin A :n alkio kuuluu täsmälleen yhteen osajoukkoon. Esimerkiksi partitiota $\{a, c\} \cup \{b, d\}$ vastaa matriisit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Täten Esimerkin 2.26 nojalla ko. matriiseja on 14 kpl.

Lemma 2.2. *Sellaisten $k \times n$ -bittimatriisien, jossa kukin rivi sisältää vähintään yhden ykkösen ja kukin sarake täsmälleen yhden ykkösen, lukumäärä on*

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

Todistus. Olkoon B_i sellaisten $k \times n$ -bittimatriisien joukko, jossa kunkin matriisin kullakin sarakeella on täsmälleen yksi ykkönen ja i :s rivi koostuu nolista, ja olkoon B niiden $k \times n$ -bittimatriisien joukko jossa kunkin matriisin kullakin sarakeella on täsmälleen yksi ykkönen. Nyt $B_1 \cup \dots \cup B_k$ muodostuu niistä matriiseista joissa jokin vaakarivi on nollarivi, ja täten väitteen muotoa olevia matriiseja on

$$|B| - |B_1 \cup \dots \cup B_k| = k^n - |B_1 \cup \dots \cup B_k|$$

kpl. Lasketaan $|B_1 \cup \dots \cup B_k|$ käyttäen seulaperiaatetta.

Nyt $|B_i| = (k-1)^n$ sillä i :s rivi koostuu nolista ja täten kullekin sarakeelle voidaan sijoittaa ykkönen täsmälleen $k-1$ tavalla.

Vastaavasti $|B_i \cap B_j| = (k-2)^n$, $|B_i \cap B_j \cap B_t| = (k-3)^n$ jne. Nyt seulaperiaatteen nojalla:

$$\begin{aligned} |B_1 \cup \dots \cup B_k| &= \binom{k}{1} (k-1)^n - \binom{k}{2} (k-2)^n + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} (k-k)^n \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n, \end{aligned}$$

ja täten

$$|B| - |B_1 \cup \dots \cup B_k| = k^n - \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

□

Lause 2.9. n -alkioinen joukko voidaan partitioida k :n epätyhjän osajoukon yhdisteeksi täsmälleen

$$S(n, k) := \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

tavalla.

Todistus. Jokaista partitiota $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, missä kukin $A_i \neq \emptyset$, kohti saadaan $k!$ sellaista $k \times n$ matriisiä jossa kullakin rivillä on vähintään yksi ykkönen, ja jonka jokaisella sarakkeella on täsmälleen yksi ykkönen (ks. Esimerkki 2.27). Lemman 2.2 nojalla tällaisia matriiseja on $\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$ kpl. □

Lukuja $S(n, k)$ sanotaan *Stirlingin toisen lajin luvuiksi*.

Lause 2.10. *Olkoon $2 \leq k \leq n-1$. Silloin*

- (1) $S(n, 1) = S(n, n) = 1$,
- (2) *Stirlingin kolmio:* $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$.

Todistus. Selvästi $S(n, 1) = 1$. Koska n alkioinen joukko voidaan partitioida n epätyhjään osaan täsmälleen yhdellä tavalla (kuhunkin osajoukkoon yksi alkio), niin $S(n, n) = 1$.

Todistetaan lopuksi (2) (vertaa Pascalin kolmion todistukseen): olkoon A n -alkioinen joukko a jokin sen alkio. Partitioita, joissa $\{a\}$ on yksi yhdisteeseen kuuluvista osajoukoista on täsmälleen $S(n-1, k-1)$ kpl. Muunlaiset partitiot voidaan muodostaa siten että partitioidaan joukko $A \setminus \{a\}$ k :n epätyhjän osajoukon

Ratkaisu: Jos $n > m$, niin surjektioita ei ole yhtäkään. Oletetaan, että $m \geq n$. Jokaista surjektioita f joukolta A joukkoon B vastaa eräs joukon A partitiio n :n epätyhjän osajoukon yhdisteeksi: $\bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$. Toisaalta jokaista A :n partitiota $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ kohti saadaan täsmälleen $n!$ surjektiota: kukin joukon A_1 alkio kuvataan alkioille b_1 ja b_1 voidaan valita n tavalla; kukin joukon A_2 alkio kuvataan alkioille b_2 ja b_2 voidaan valita $n - 1$ tavalla jne. Siispä surjektioita joukolta A joukkoon B on $n!S(m, n)$ kpl.

Tarkastellaan seuraavaksi luonnollisen luvun n partitiota k :hon osaan ts. etsimme sellaisia ei-negatiivisia kokonaislukuja n_1, \dots, n_k , että $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Tässä myöskään lukujen n_i järjestyksellä ei ole merkitystä.

Esimerkki 2.31. Luvun kuusi partitiot neljään osaan:

$$\begin{aligned} &0 + 0 + 0 + 6 \\ &0 + 0 + 1 + 5 \\ &0 + 0 + 2 + 4 \\ &0 + 0 + 3 + 3 \\ &0 + 1 + 1 + 4 \\ &0 + 1 + 2 + 3 \\ &0 + 2 + 2 + 2 \\ &1 + 1 + 1 + 3 \\ &1 + 1 + 2 + 2 \end{aligned}$$

Esimerkki 2.32. Monellako tavalla kuusi samanlaista palloa voidaan sijoittaa neljään samanlaiseen lokeroon? Entäpä n samanlaista palloa k :hon samanlaiseen lokeroon?

Ratkaisu: Kuusi samanlaista palloa voidaan sijoittaa neljään samanlaiseen lokeroon yhtä monella tavalla kuin luku 6 voidaan partitioida neljään osaan eli yhdeksällä tavalla (Esimerkki 2.31).

Vastaavasti n samanlaista palloa voidaan sijoittaa k :hon samanlaiseen lokeroon täsmälleen yhtä monella tavalla kuin luku n voidaan partitioida k :hon osaan.

Luvun n partioiden lukumäärän laskeminen on mutkikasta. On kuitenkin olemassa tehokkaita menetelmiä jotka hyödyntävät nk. generoivia funktioita. Näistä lisää seuraavassa kappaleessa.

2.6. Generoivat funktiot. Tarkastellaan reaalityttöjen lukujonoa a_0, a_1, a_2, \dots . Sen *generoiva funktio* on formaalinen potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$.

Formaalista potenssisarjaa voi ajatella vain vaihtoehtoisena esitystapana jonolle a_0, a_1, a_2, \dots . Jonon esittämisessä formaalina potenssisarjana on kuitenkin se etu, että formaalit potenssisarjat toteuttavat samat identiteetit kuin suppenevat potenssisarjat, ja että niillä voi laskea kuten polynomeilla. Erityisesti, niitä voidaan laskea yhteen ja kertoa kuten polynomeja, ja myös derivoida termeittän.

Esimerkki 2.33. Jonon $1, 1, 1, 1, \dots$ generoiva funktio on

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Esimerkki 2.34. Derivoimalla edellinen yhtälö saadaan

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2},$$

ja täten jonon $1, 2, 3, 4, \dots$ generoiva funktio on $1/(1-x)^2$.

Kertomalla edellinen yhtälö puolittain x :llä saadaan

$$0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2},$$

ja täten jonon $0, 1, 2, 3, \dots$ generoiva funktio on $x/(1-x)^2$.

Derivoidaan jälleen:

$$1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \dots = \frac{x+1}{(1-x)^3},$$

ja täten jonon $1, 2^2, 3^3, 4^2, \dots$ generoiva funktio on $(x+1)/(1-x)^3$.

Huomautus 2.5. Ylläesitetty identiteetit ovat voimassa formaalien potenssisarjojen muodostaman renkaan osamääräkunnassa.

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Seuraava identiteetti on välitön seuraus funktion $x \mapsto (1+x)^{-n}$ Maclaurinin sarjasta ja on sangen käyttökelpoinen työkalu kombinatoriikassa:

$$\begin{aligned} (1+x)^{-n} &= 1 - nx + (-n)(-n-1)\frac{x^2}{2!} + (-n)(-n-1)(-n-2)\frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r. \end{aligned}$$

Määritellään nyt *negatiivinen binomikerroin* asettamalla

$$\binom{-n}{r} := \begin{cases} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} & \text{jos } n = 1, 2, 3, \dots, \\ 1 & \text{jos } n = 0. \end{cases}$$

Nyt siis saamme Newtonin binomikaavan yleistyksen

$$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} x^r.$$

Esimerkki 2.35. Monellako tavalla voidaan 24 samanlaista tehtävää jakaa neljälle tietokoneelle, jos kullekin koneelle on tultava 3 – 8 tehtävää?

Ratkaisu: Olkoon a_n niiden tapojen lukumäärä joilla neljälle koneelle voidaan jakaa n tehtävää. Nyt siis a_n on ehdon $3 \leq y_i \leq 8$ ($i = 1, \dots, 4$) toteuttavien yhtälön $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = n$ kokonaislukuratkaisujen (y_1, y_2, y_3, y_4) lukumäärä.

Mikä on jonon a_n generoiva funktio? Havainto: kun sulkeet poistetaan tulossa

$$T := (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4,$$

niin päädytään muotoa $x^{y_1} x^{y_2} x^{y_3} x^{y_4} = x^{y_1+y_2+y_3+y_4}$ olevien monomien summaan, missä kukin $3 \leq y_i \leq 8$. Siispä

$$a_n \text{ on monomin } x^n \text{ kerroin tulossa } T.$$

Siispä alkuperäiseen ongelman ratkaisemiseksi riittää laskea monomin x^{24} kerroin tulossa T . Ensinnäkin

$$(x^3 + \dots + x^8)^4 = x^{12}(1+x+\dots+x^5)^4 = x^{12} \left(\frac{1-x^6}{1-x} \right)^4,$$

joten on siis laskettava termin x^{12} kerroin tulossa

$$(1-x^6)^4(1-x)^{-4} = (1 - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \dots)(1 + \binom{-4}{1}(-x) + \binom{-4}{2}(-x)^2 + \dots),$$

joka on

$$\binom{-4}{12}(-1)^{12} - \binom{4}{1}\binom{-4}{6}(-1)^6 + \binom{4}{2} \cdot 1 = \binom{15}{12} - 4\binom{9}{6} + 6 \cdot 1 = 125.$$

Siispä tehtävät voidaan jakaa koneille 125 tavalla.

Tarkastellaan vielä generoivien funktioiden käyttöä positiivisen kokonaisluvun n partitioiden lukumäärän $p(n)$ laskemisessa, kun partition pituutta ei rajoiteta. Ideana on konstruoida generoiva funktio joka pitää kirjaa käytettävien ykkösten, kakkosten, kolmosten jne. lukumääristä. Sarja $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ pitää kirjaa

ykkösten, sarja $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$ kakkosten, sarja $1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots$ kolmosten lukumääristä jne. Täten jonon $1 = p(0), p(1), p(2) \dots$ generoiva funktio on

$$\begin{aligned} P(x) &:= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) \cdots (1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots) \cdots \\ &= \frac{1}{(1-x)} \frac{1}{(1-x^2)} \frac{1}{(1-x^3)} \cdots \frac{1}{1-x^n} \cdots \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^i)}. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.36. Montako partitiota on luvulla 10?

Ratkaisu: Nyt on turha ottaa niitä termejä $1/(1-x^i)$ tuloon $P(x)$ missä $i > 10$. Siispä $p(10)$ on monomin x^{10} kerroin tulossa $\prod_{i=1}^{10} \frac{1}{(1-x^i)}$.