

Matemaattiset menetelmät II (2009)

Harjoitus 1/viikko 38

- (1) Etsi ne reaaliluvut x joilla vektorit $(x^2+8, -1)$, $(x, 5x^2+4) \in \mathbb{R}^2$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
- (2) Määritä vektorin $\bar{a} = (-2, 2, 1)$ normi $\|\bar{a}\|$ sekä sen kulmat \mathbb{R}^3 :n koordinaattiakselin kanssa.
- (3) Laske vektorin $\bar{a} = (1, 3, 1)$ ortogonaalinen projektio $P_{\bar{b}}\bar{a}$ vektorille $\bar{b} = (-2, 1, 1)$. Laske myös $\bar{a} - P_{\bar{b}}\bar{a}$ ja osoita että se on kohtisuorassa vektoria \bar{b} vastaan.
- (4) (a) Onko joukko $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1\}$ avoin, suljettu tai rajoitettu \mathbb{R}^2 :n osajoukko?
(b) Määritä A :n sisäpisteet, kasautumispisteet ja reunapisteet.
- (5) (a) Onko joukko $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\}$ avoin, suljettu tai rajoitettu \mathbb{R}^2 :n osajoukko?
(b) Määritä A :n sisäpisteet, kasautumispisteet ja reunapisteet.
- (6) Olkoon \bar{x}_0 joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kasaantumispiste.
(a) Osoita, että A :ssa on äärettömän monta \mathbb{R}^n :n pistettä.
(b) Osoita, että A :ssa on jono $(\bar{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ jonka raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \bar{x}_0$ eli

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_{\epsilon} \in \mathbb{N} : n > n_{\epsilon} \Rightarrow \|\bar{x}_n - \bar{x}_0\| < \epsilon.$$