

Matemaattiset menetelmät II (2009)

Harjoitus 2/viikko 39

(1) Mikä on reaalifunktion f määrittelyjoukko, kun

(a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

(b) $f(x, y) = \ln(1 - e^{1-xy})$.

Hahmottele ko. joukot xy -tasoon.

(2) Laske seuraavat raja-arvot:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sin(x-y)}{(x-y)\cos(x-y)}$. (Vihje: sijoitus $h = x - y$).

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(3) Onko funktiolla $f(x, y) = \frac{\sin(2xy)}{x^2+y^2}$ raja-arvoa origossa?

(4) Olkoon $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ ja $k \in \mathbb{R}$. Mitä pistettä kohti f :n arvot lähestyvät, kun (x, y) lähestyy kohti origoa pitkin suoraa $y = kx$. Onko f :llä raja-arvoa origossa?

(5) Laske funktion $f(x, y) = xy^2 + \sin(xy)$ ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

(6) Olkoon

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } xy = 0, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

(a) Ovatko osittaisderivaatat $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ olemassa?

(b) Onko f jatkuva origossa?

(7) Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä U . Todista: f :llä on raja-arvo a pisteessä \bar{x}_0 jos ja vain jos jokaiselle jonolle $(\bar{x}_m)_{m=1}^\infty$ joukon U pisteitä pätee:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{x}_m = \bar{x}_0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f(\bar{x}_m) = a.$$