Matemaattiset menetelmät II (2009)

Harjoitus 4/viikko 41

1. Laske $\int_C 2x\,ds$, kun C koostuu kaarista C_1 ja C_2, missä C_1 on paraabelin kaari $y = x^2$ pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(1,1)$ ja C_2 on pisteitä $(1,1)$ ja $(1,2)$ yhdistävä jana.

2. Laske funktion $f(x,y) = 2x^2y + 2$ integraali yli alueen A, jota rajoittavat suorat $x = 0$, $y = x$, $y - x = 1$ ja $y = 2$.

3. Laske integraali

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy \right) dx.$$

4. Laske $\iiint_V (z + xy)\,dx\,dy\,dz$, kun V on tetraedri, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$.

5. Laske sen tasoalueen pinta-ala, jota rajoittavat paraabelit $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ ja $x = 2y^2$. (Vihje: tarkasteale muuttujien vaihtoa $u = y/x^2$ ja $v = x/y^2$.)

6. Olkoon V pallonpuolikas, jonka säde on a ja jonka tiheys ρ pisteessä $(x,y,z) \in V$ riippuu sen etäisyydestä r pallon keskipisteeseen seuraavasti: $\rho(x,y,z) = k(2a - r)$, missä k on vakio. Laske V:n massa käyttämällä pallokoordinaatteja.

7. a) *Sylinterikoordinaatisto* $\mathbb{R}^3$:ssa määräytyy kaavoista

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, & r \geq 0 \\ y = r\sin\varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ z = z \end{cases}$$

Havainnollista sylinterikoordinaatteja kuviolla sekä laske ko. muunnokseen liittyvä Jacobin determinantti $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}$.

b) Laske $\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, kun V on $\mathbb{R}^3$:n kappale, jota rajoittavat sylinterit $x^2+y^2 = 4$ ja $x^2+y^2 = 16$ sekä tasot $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$ ja $x = y$.