

## Matemaattiset menetelmät II (2009)

Harjoitus 5/viikko 42

1. Laske funktion  $f(x, y, z) = (xe^y, z \sin y, xy \ln z)$  divergenssi ja roottori. Onko funktiolla  $f$  skalaari- tai vektoripotentiaalia?
2. Laske  $\int_C \bar{u} \cdot d\bar{r}$ , kun  $\bar{u} = (y^2, 3xy)$  ja  $C$  on käyrä ylemmässä puolitasossa, jonka määräävät puoliympyrät  $x^2 + y^2 = 1$  ja  $x^2 + y^2 = 4$  ( $y \geq 0$ ) sekä  $x$ -akseli,  
(a) suoraan määritelmään nojautuen  
(b) käyttämällä Greenin kaavaa.
3. Laske Greenin kaavan avulla sen tasoalueen pinta-ala, jota rajoittavat paraabelit  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$ ,  $x = y^2$  ja  $x = 2y^2$ .
4. Laske pintaintegraali  $\iint_S x^2 dA$  yli yksikköpallon pinnan  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . (Parametrisointi pallokoordinaattien avulla.)
5. Laske Stokesin lauseen avulla  $\int_C \bar{u} \cdot d\bar{r}$ , missä  $\bar{u}(x, y, z) = -y^3\bar{i} + x^3\bar{j} - z^3\bar{k}$  ja  $C$  on  $\mathbb{R}^3$ :ssa sylinterin  $x^2 + y^2 = 1$  ja tason  $2x + 2y + z = 3$  leikkauksen määräämä avaruuskäyrä.
6. Laske vektorikentän  $\bar{g}(x, y, z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$  vuo yksikköpallon pinnan  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  läpi  
(a) suoraan määritelmään nojautuen,  
(b) divergenssilauseen avulla.