

Numeeriset menetelmät (2010)

Harjoitus 1/viikko 4

1. Tutki seuraavien funktioiden suppenemismuutoksia kun $x \rightarrow \infty$:

$$(a) f(x) = |\sin x|x^4 + \ln x^3, \quad (b) h(x) = \frac{x^2}{1-x^3} + x^{-1} \cos x.$$

2. Pätevätkö seuraavat väitteet:

$$(a) \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + O(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

$$(b) \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{1}{24} + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Vihje: Sovella l'Hospitalin sääntöä tai Taylorin sarjaa.

3. Tutki seuraavien lukujonojen suppenemismuutoksia:

$$(a) \left(\frac{n+3}{n+7}\right) \quad (b) \left(\frac{2^n+3}{2^n+7}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

4. Laske funktion $f(x) = \arctan x$ toisen asteen Taylorin polynomin avulla likiarvo luvulle $\arctan(0.97)$, kun kehityskeskus $c = 1$. Arvioi approksimaatiossa syntyvää virhettä Lagrangen jäännöstermin avulla.

5. Insinööri Terävä hakee automaatiosovelluksen takaisinkytkennän optimiarvoa ja iteroi kaavalla

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4 + x_n^2}{2x_n},$$

mutta ei löydä iteraatiolle sellaista alkuarvoa, että iteraatio suppenisi. Auta häntä.

6. Etsi Newtonin menetelmällä yhtälön

$$(x-2)(x-5) + 0.0001x^3 = 0$$

juuret.

7. Etsi yhtälön

$$e^x - \cos x - 1 = 0$$

positiiviset juuret käyttämällä

- (a) puolitusmenetelmää,
- (b) sekanttimenetelmää,
- (c) Newtonin menetelmää.

Vertaa lopuksi menetelmien tehokkuutta sekä alkuarvon valinnan vaikutusta (c)-kohdassa.