

## Numeeriset menetelmät (2010)

Harjoitus 2/viikko 5

1. Ratkaise Gaussin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 2 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 & = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 & = 1 \end{cases}$$

2. (a) Muodosta LU-hajotelma matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 6 & 20 & 10 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Ratkaise LU-hajotelman avulla yhtälöryhmä  $Ax = b$ , missä  $b = (0 \ 4 \ 1)^\top$ .

3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -0.99 & 1.99 \end{pmatrix}.$$

- (a) Muodosta matriisin  $A$  käänteismatriisi sekä laske  $A$ :n kuntoluku joko  $\|\cdot\|_\infty$ -normia tai  $\|\cdot\|_1$ -normia käyttäen.

- (b) Ratkaise yhtälöryhmä

$$Ax = b + \varepsilon r, \quad \text{missä } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ja  $\varepsilon \geq 0$  kuvaa mittausvirheen suuruutta  $b$ :ssä.

- (c) Laske ratkaisuvektoriin  $x$  liittyvä absoluuttinen ja suhteellinen virhe  $\|\cdot\|_2$ -normin suhteen, kun  $\varepsilon = 0$  vastaa virheetöntä ratkaisua.

4. (a) Ratkaise Jacobin iteraatiomenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -3x_1 + 9x_2 + 4x_3 & = -14 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 & = 10 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 & = -33 \end{cases}$$

kun iteraation alkuarvona käytetään nollavektoria  $X_0 = (0, 0, 0)^\top$ .

- (b) Mikä on yhtälöryhmän tarkka ratkaisu?

5. (a) Ratkaise Gauss-Seidelin iteraatiomenetelmällä edellisen tehtävän yhtälöryhmä.

- (b) Vertaile Jacobin ja Gauss-Seidelin iteraatiomenetelmien suppenemista toisiinsa ko. alkuarvolla.
- 6.
- (a) Selvitä suppeneeko tehtävän 4 Jacobin iteraatio kaikilla alkuarvoilla  $X_0 \in \mathbb{R}^3$ .
  - (b) Selvitä suppeneeko tehtävän 5 Gauss-Seidelin iteraatio kaikilla alkuarvoilla  $X_0 \in \mathbb{R}^3$ .