

## Numeeriset menetelmät (2011)

Harjoitus 5/viikko 8

1. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$y' = 2xy; \quad y(0) = 1. \quad (1)$$

Laske alkuarvot tehtävän ratkaisufunktion  $y$  arvolle  $y(2)$  likiarvo käyttämällä

- (a) Eulerin menetelmää,
  - (b) Heunin menetelmää.
2. (a) Laske alkuarvo-ongelman (1) ratkaisufunktion  $y$  arvolle  $y(2)$  likiarvo käyttämällä Runge-Kutta menetelmää.
- (b) Piirrä alkuarvot tehtävän (1) tarkan ja likimääräisen ratkaisun  $y(x)$  kuvaaja kun  $x \in [0, 2]$
3. (a) Muuta differentiaaliyhtälö

$$y'' = xy' - 3y; \quad y(0), \quad y'(0) = -3, \quad (2)$$

ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi.

- (b) Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä numeerisesti välillä  $[0, 2]$ , kun askelpituutena on  $h = 0.1$ . Piirrä samaan kuvaan saamasi numeerinen ratkaisu sekä alkuarvot tehtävän (2) tarkka ratkaisufunktio  $y(x) = x^3 - 3x$ .
4. Yksinkertaisen heilurin, joka koostuu pituutta  $l$  olevasta ohuesta narusta ja pistemäisestä massasta  $m$ , poikkeutuskulma  $\omega(t)$  toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\omega''(t) + \frac{g}{l} \sin \omega(t) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0, \omega'(0) = 0. \quad (3)$$

Kun  $\omega_0$  on pieni, niin  $\omega(t)$  on likimain yhtälön

$$\omega''(t) + \frac{g}{l} \omega(t) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0, \omega'(0) = 0 \quad (4)$$

ratkaisu.

Ratkaise differentiaaliyhtälö (3) numeerisesti ja yhtälö (4) tarkasti välillä  $[0, 2]$ , kun  $l = 1$  m ja  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> ja  $\omega_0 = 1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  ja  $90^\circ$ .

Piirrä kutakin  $\omega_0$ :n arvoa kohti samaan kuvaan yhtälön (3) numeerinen ratkaisu ja yhtälön (4) tarkka ratkaisu.