

VAASAN YLIOPISTO

TEKNILLINEN TIEDEKUNTA

SÄHKÖTEKNIikka

Maarit Vesapuisto

SATE.2010 DYNAAMINEN KENTTÄTEORIA:

KAPPALE 3:

SÄHKÖMAGNEETTISET TASOAALLOT

Opetusmoniste (Raaka versio)

Vaasassa 28.10.2009

SISÄLLYSLUETTELO

3.	SÄHKÖMAGNEETTISET TASOAALLOT	3
3.1.	Johdanto	3
3.2.	Tasoaalto häviöttömässä väliaineessa	3
3.2.1.	Poikittainen sähkömagneettinen aalto	6
3.2.2.	Tasoaaltojen polarisaatio	9
3.3.	Tasoaallot häviöllisessä väliaineessa	11
3.3.1.	Hyvät johteet	11
3.4.	Ryhmä nopeus	12
3.5.	Tasoaalto saapuu johdetasolle normaalin suuntaisesti	14
3.6.	Vino saapuminen tasomaiseen johdepintaan	15
3.6.1.	Kohtisuora (eli horisontaalinen eli E -) polarisaatio	15
3.6.2.	Pysty (eli vertikaalinen eli H -) polarisaatio	19
3.7.	Tasoaalto saapuu eristeiden rajapinnalle	22
3.7.1.	Normaalin suuntainen saapuminen rajapinnalle	23
3.7.2.	Vino saapuminen rajapinnalle	28

3. SÄHKÖMAGNEETTISET TASOAALLOT

3.1. Johdanto

Edellisessä kappaleessa 2 osoitettiin, että lähteettömässä ei-johtavassa yksinkertaisessa väliaineessa Maxwellin yhtälöt (2-40 a, b, c ja d) voidaan yhdistää homogeenisiksi sähkökentänvoimakkuuden $\mathbf{E}$ ja magneettikentänvoimakkuuden $\mathbf{H}$ vektoriaaltoyhtälöiksi. Ko. yhtälöillä 2-42 ja 2-43 on toisiinsa verrattuna täysin sama muoto. Lähteettömässä vapaassa tilassa on $\mathbf{E}$:n aaltoyhtälö

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (3-1)$$

missä

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \quad (3-2)$$

on aallon etenemisnopeus (valon nopeus) vapaassa tilassa.

3.2. Tasoaalto häviöttömässä väliaineessa

Vapaassa tilassa yhtälö 3-1 saa muodon

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = 0, \text{ jossa} \quad (3-3)$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \text{ [rad/m]}. \quad (3-4)$$

Kartesisisessa koordinaatistossa yhtälö 3-3 voidaan esittää yhtälöryhmänä

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) E_x = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) E_y = 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) E_z = 0 \end{cases} \quad (3-5)$$

Olkoon tasoaallon E_x komponentti kaikkialla poikittain z :aan nähden, eli

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = 0 \text{ ja } \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} E_y = 0.$$

Tällöin yhtälö 3-5 yksinkertaistuu muotoon

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k_0^2 E_x = 0. \quad (3-6)$$

Yhtälön 3-6 ratkaisuksi saadaan

$$E_x(z) = E_x^+(z) + E_x^-(z) = E_x^+ e^{-jk_0 z} + E_x^- e^{jk_0 z}, \quad (3-7)$$

jossa kertoimet E_x^+ ja E_x^- ovat (kompleksiluku) vakioita, jotka on määritettävä rajapinta-ehtojen avulla.

Tarkastellaan yhtälön 3-7 ensimmäistä oikeanpuoleista termiä aikatasossa (muodossa $\cos \omega t$) olettaen, että termi E_x^+ on reaalityyppinen vakio. Tällöin termi voidaan esittää yhtälöllä

$$E_x^+(z, t) = \operatorname{Re}\{E_x^+(z) e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{E_0^+ e^{j(\omega t - k_0 z)}\} = E_0^+ \cos(\omega t - k_0 z). \quad (3-8)$$

Ajan hetkellä $t = 0$, $E_x^+(z, 0) = E_0^+ \cos k_0 z$ on kosinikäyrä, jonka amplitudi on E_0^+ . Seuraavina ajanhetkinä käyrä kulkee positiiviseen z suuntaan. Tällöin aaltoa kutsutaan kulkuaallosi. Haluttaessa tutkia aaltoa tietyssä avaruuden pisteessä, asetetaan $\cos(\omega t - k_0 z) = \text{vakio}$.

Tällöin vaihenopeudeksi v_p saadaan

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c. \quad (3-9)$$

Aaltoluvun ja aallon pituuden välille voidaan kirjoittaa yhtälö

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{ [rad/m]}, \quad (3-10)$$

joka kuvaa, kuinka monta aallonpituutta yhdessä syklissä on. Käänteinen yhteys kuvataan yhtälöllä

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} \text{ [m]}. \quad (3-11)$$

Vastaavasti $E_x^- e^{jk_0 z}$ edustaa kosinikäyrää, joka etenee -z suuntaan samalla nopeudella c .

Vastaava magneettikentänvoimakkuuden $\mathbf{H}$ yhtälö saadaan yhtälöiden 2-54a avulla

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x^+(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu_0 (H_x^+ \mathbf{e}_x + H_y^+ \mathbf{e}_y + H_z^+ \mathbf{e}_z),$$

josta saadaan ratkaistua magneettikentän voimakkuuden komponentit

$$\begin{cases} H_x^+ = 0, \\ H_y^+ = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z} \text{ ja} \\ H_z^+ = 0. \end{cases} \quad (3-12)$$

Koska H_y^+ on ainoa nollasta poikkeava $\mathbf{H}$:n komponentti ja koska

$$\frac{\partial E_x^+(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (E_0^+ e^{-jk_0 z}) = -jk_0 z E_x^+(z),$$

magneettikentän voimakkuuden yhtälöksi saadaan

$$H_y^+(z) = \frac{-jk_0}{-j\omega\mu_0} E_x^+(z) = \frac{k_0}{\omega\mu_0} E_x^+(z) = \frac{1}{\eta_0} E_x^+(z) \text{ [A/m]}, \quad (3-13)$$

missä

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cong 120\pi \cong 377 \text{ } [\Omega]. \quad (3-14)$$

on aaltoimpedanssi vapaassa tilassa.

Vastaavasti heijastuvalle sähkökentälle on

$$\frac{\partial E_x^-(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (E_0^- e^{jk_0 z}) = jk_0 z E_x^-(z),$$

joten heijastuva magneettikenttä saa muodon

$$H_y^- = -\frac{jk_0}{j\omega\mu_0} E_x^-(z) = \frac{-k_0}{\omega\mu_0} E_x^-(z) = -\frac{1}{\eta_0} E_x^-(z).$$

Koska aaltoimpedanssi η_0 on vapaassa tilassa reaalinen, sähkö- ja magneettikentän voimakkuudet ovat samassa vaiheessa. Tällöin magneettikentän voimakkuudelle voidaan kirjoittaa aikatasossa yhtälö

$$\mathbf{H}_y^+(z, t) = H_y^+(z, t) \mathbf{e}_y = \text{Re} \{ H_y^+(z) e^{j\omega t} \} \mathbf{e}_y = \frac{E_0^+}{\eta_0} \cos(\omega t - k_0 z) \mathbf{e}_y. \quad (3-15)$$

3.2.1. Poikittainen sähkömagneettinen aalto

Edellisessä totesimme, että z-suuntaan etenevän sähkömagneettiseen tasoaaltoon, jota kuvataan sähkökentän voimakkuudella $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$, liittyy magneettikentän voimakkuus $\mathbf{H} = H_y \mathbf{e}_y$. Tällöin $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{H}$ ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden ja poikittain etenemissuuntaan. Tällaista aaltoa kutsutaan poikittaiseksi sähkömagneettiseksi aalloksi (transverse electromagnetic (TEM) wave). Taajuustasossa esitettyjen kenttien yhtälöt riippuvat ainoastaan etäisyyttä z kuvaavasta koordinaattiakselista.

Seuraavassa tutustumme tilanteeseen, jossa tasoaalto etenee satunnaiseen suuntaan.

Kuvattakoon +z-suuntaan etenevää tasoaaltoa taajuustasossa yhtälöllä

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{-jkz}, \quad (3-16)$$

missä $\mathbf{E}_0$ on vektori. Yleisemmässä muodossaan yhtälö 3-16 on

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z}. \quad (3-17)$$

Yhtälössä 3-17 esiintyvä lauseke täyttää homogeenisen Helmholtzin yhtälön määrittelyn, kun

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon. \quad (3-18)$$

Märitellään aaltolukuvektori

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z = k \mathbf{e}_n \quad (3-19)$$

ja etäisyysvektori origosta tutkittavaan pisteeseen

$$\mathbf{R} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z. \quad (3-20)$$

Tällöin yhtälö 3-17 voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} = \mathbf{E}_0 e^{-jk \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{R}}, \quad (3-21)$$

missä $\mathbf{e}_n$ etenemissuuntaan oleva yksikkövektori. Yhtälön 3-19 perusteella voidaan kirjoittaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} k_x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_x = k \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_x \\ k_y = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_y = k \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_y, \\ k_z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z = k \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (3-22)$$

Varauksettomassa tilassa $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$. Joten vektorin $\mathbf{E}_0$ ollessa vakiovektori

$$\vec{\nabla} \cdot (\mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}) = \mathbf{E}_0 \cdot \vec{\nabla} (e^{-jk \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{R}}) = 0. \quad (3-23)$$

Pistetulon oikeapuoli voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} (e^{-jk\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{R}}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\
&= -j(k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\
&= -jk \mathbf{e}_n e^{-jk\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{R}},
\end{aligned}$$

jolloin yhtälö 3-23 voidaan kirjoittaa muotoon

$$-jk (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_n) e^{-jk\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{R}} = 0. \quad (3-24)$$

Yhtälö 3-24 toteutuu vain silloin, kun

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_n = 0. \quad (3-25)$$

Joten yhtälössä 3-21 esitetty ratkaisu edellyttää, että $\mathbf{E}_0$ on poikittain aallon etenemissuuntaan nähden.

Yhtälössä 3-21 esitettyyn tasoaaltoon liittyvä magneettikenttä saadaan yhtälön 2-54a perusteella

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{j\omega\mu} \vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{1}{\eta} \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}(\mathbf{R}) \quad [\text{A/m}], \quad (3-26)$$

missä

$$\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [\Omega]. \quad (3-27)$$

on aaltoimpedanssi väliaineessa.

Sijoittamalla yhtälö 3-21 yhtälöön 3-26 saadaan yhtälö

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \frac{1}{\eta} (\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_0) e^{-jk\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{R}}. \quad (3-28)$$

Edellisten perusteella voidaan todeta, että tasoaalto, joka etenee suuntaan $\mathbf{e}_n$, on TEM-aalto, jossa $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ja sekä $\mathbf{E}$ että $\mathbf{H}$ ovat kohtisuorassa suuntaan $\mathbf{e}_n$.

3.2.2. Tasoaaltojen polarisaatio

Tasoaallon polarisaatiolla kuvataan sähkökentän voimakkuuden vektorin ajasta riippuvaa käyttäytymistä tietyssä pisteessä avaruudessa. Jos tasoaallon sähkökentän voimakkuuden vektori $\mathbf{E}$ on kiinnitetty esim. suuntaan x ($\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$, missä E_x voi olla positiivinen tai negatiivinen), aallon sanotaan olevan lineaarisesti polarisoitunut suuntaan x . Erillinen magneettikentän voimakkuuden käyttäytymisen kuvaaminen on tarpeetonta, koska magneettikentän voimakkuuden $\mathbf{H}$ suunta riippuu $\mathbf{E}$:n suunnasta.

Joissakin tapauksissa tasoaallon $\mathbf{E}$:n suunta voi vaihdella ajan mukaan tarkasteltavassa pisteessä. Tarkastellaan tasoaaltoa, joka koostuu kahdesta lineaarisesti polarisoituneesta aallosta: ensimmäinen aalto on polarisoitunut x -suuntaan ja toinen y -suuntaan. Lisäksi toinen aalto on ajallisesti 90° (tai $\pi/2$) jäljessä ensimmäistä aaltoa. Taajuustasossa tarkastellessa voidaan tilanne esittää yhtälöllä

$$\mathbf{E}(z) = E_1(z) \mathbf{e}_x + E_2(z) \mathbf{e}_y = E_{10} e^{-jkz} \mathbf{e}_x - jE_{20} e^{-jkz} \mathbf{e}_y, \quad (3-29)$$

missä E_{10} ja E_{20} ovat reaalilukuja, jotka kuvaavat lineaarisesti polarisoituneen aallon amplitudeja.

Aikatasossa kyseinen aalto esitetään muodossa

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \text{Re} \left\{ (E_1(z) \mathbf{e}_x + E_2(z) \mathbf{e}_y) e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ (E_{10} \mathbf{e}_x - jE_{20} \mathbf{e}_y) e^{j(\omega t - kz)} \right\} \\ \Rightarrow \mathbf{E}(z, t) &= E_{10} \cos(\omega t - kz) \mathbf{e}_x + E_{20} \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Tarkastellaan tilannetta pisteessä $z = 0$. Tällöin yhtälö saa muodon

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(0, t) &= E_{10} \cos(\omega t) \mathbf{e}_x + E_{20} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_y \\ &= E_{10} \cos(\omega t) \mathbf{e}_x + E_{20} \sin(\omega t) \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (3-30)$$

Ajan kuluessa ωt kasvaa $0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi \rightarrow \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi \rightarrow \dots$. Vektorin $\mathbf{E}(0, t)$ kärki 'piirtää' ellipsiä vastapäivään. Analyytisesti merkittynä:

$$\cos \omega t = \frac{E_1(0,t)}{E_{10}} \text{ ja}$$

$$\sin \omega t = \frac{E_2(0,t)}{E_{20}} = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_1(0,t)}{E_{10}} \right)^2} .$$

Edellä esitettyjen yhtälöiden yhdistäminen johtaa ellipsin yhtälöön:

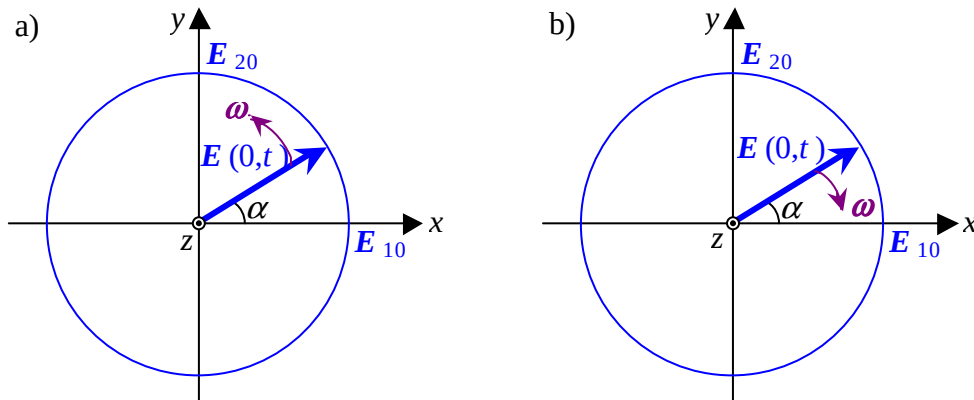
$$\left(\frac{E_2(0,t)}{E_{20}} \right)^2 + \left(\frac{E_1(0,t)}{E_{10}} \right)^2 = 1 . \quad (3-31)$$

Yhtälön 3-31 mukaisessa tilanteessa aalto on elliptisesti polarisoitunut, jos $E_{10} \neq E_{20}$, ja ympyräpolarisoitunut, jos $E_{10} = E_{20}$.

Jos $E_{10} = E_{20}$, hetkellinen kulma α kuvaa vektorin $\mathbf{E}$ kulmaa x-akseliin nähden paikassa $z = 0$:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{E_2(0,t)}{E_1(0,t)} = \omega t . \quad (3-32)$$

Jos oikean käden sormet seuraavat $\mathbf{E}$:n kiertosuuntaa peukalon osoittaessa aallon etenemissuuntaan, puhutaan oikean-käden tai positiiviseen suuntaan ympyräpolarisoituneesta aallosta (Kuva 1).



Kuva 1. a) Oikean-käden ja b) vasemman-käden suuntaan ympyräpolarisoitunut aalto

3.3. Tasoaallot häviöllisessä väliaineessa

Lähteettömässä häviöllisessä väliaineessa Helmholtzin homogeeninen vektoryhtälö saa muodon

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{E} + k_c^2 \mathbf{E} = 0, \text{ jossa} \quad (3-33)$$

aaltoluku $k_c = \omega \sqrt{\mu \epsilon_c}$ on kompleksiluku.

Tässä vaiheessa on hyvä ottaa käyttöön siirtojohtoteoriasta tuttu etenemiskerroin γ

$$\gamma = jk_c = j\omega \sqrt{\mu \epsilon_c} = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 + \frac{\sigma}{j\omega \epsilon}}, \quad (3-34)$$

missä α on vaimenemiskerroin ja β on vaihekerroin.

3.3.1. Hyvät johteet

Hyvillä johteilla $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$, joten etenemiskertoimen yhtälö 3-34 voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} \gamma &= j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{\sigma}{j\omega \epsilon}} = \sqrt{j} \sqrt{\omega \mu \sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu \sigma} = (1+j) \sqrt{\pi f \mu \sigma} \\ &= \alpha + j\beta \end{aligned} \quad (3-35)$$

joten

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma}. \quad (3-36)$$

Hyvän johteen ($\sigma \gg \omega \epsilon$) aaltoimpedanssin yhtälöstä

$$\eta_c = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\sigma + j\omega \epsilon}} \approx \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\sigma}} = (1+j) \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = (1+j) \frac{\alpha}{\sigma} \quad (3-37)$$

voidaan huomata, että magneettikentän voimakkuus on 45° jäljessä sähkökentän voimakkuutta.

Vaihenopeus hyvässä johteessa on

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}} \text{ [m/s]}, \quad (3-38)$$

joka on verrannollinen $\sqrt{f}$:ään ja $1/\sqrt{\sigma}$:aan.

Aallonpituus hyvässä johteessa etenevälle tasoaallolle on

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f \mu \sigma}} \text{ [m]}. \quad (3-39)$$

Vaimenemiskertoimen $e^{-\alpha z}$ vuoksi etenevä aalto vaimenee $e^{-1} = 0,368$, kun se etenee matkan $\delta = 1/\alpha$. Kyseistä suuretta δ kutsutaan tunkeutumissyvyudeksi

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \text{ [m]}. \quad (3-40)$$

Koska hyvällä johteella $\alpha = \beta$, tunkeutumissyvyydelle voidaan kirjoittaa myös yhtälö

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi} \text{ [m]}. \quad (3-41)$$

3.4. Ryhmä nopeus

Kappaleessa 3.2 määriteltiin yksitaajuisen tasoaallon vaihenopeus

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \text{ [m/s]}. \quad (3-42)$$

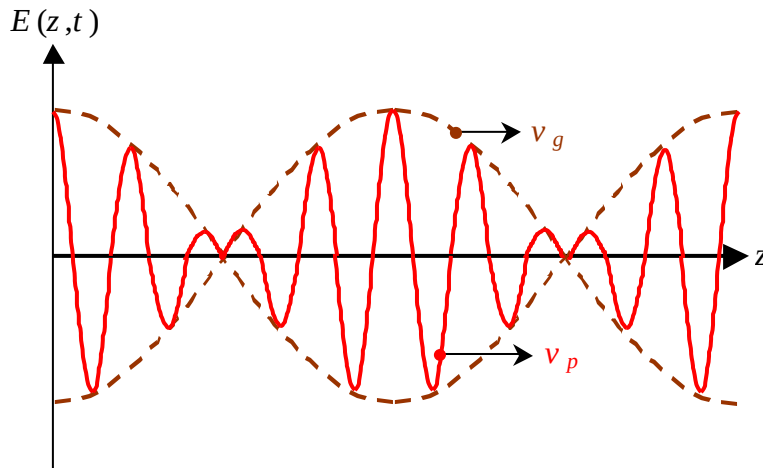
Häviöttömässä väliaineessa etenevälle tasoaallolle vaihekerroin $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ on ω n lineaarinen funktio. Tästä johtuen vaihenopeus $v_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ on vakio, joka on riippumaton taajuudesta. Kuitenkin, joissakin tapauksissa (esim. silloin kun aalto etenee häviöllisessä väliaineessa tai siirtojohdinta pitkin tai aaltoputkessa) vaihekerroin ei ole ω n lineaarinen funktio; eri taajuuksilla etenevillä aalloilla on erilaiset vaihenopeudet. Tällaisissa

tilanteissa signaalista muodostuu ”ryhmästä” eritaajuuksia ja ne muodostavat aaltopaketin. Ryhmänopeus on se nopeus, jolla aaltopaketin verhokäyrä etenee.

Yksinkertaisimmassa tapauksessa aaltopaketti muodostuu kahdesta etenevästä aallosta joilla on sama amplitudi $E_0 = E_1 = E_2$, mutta kulmataajuuudet poikkeavat toisistaan $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ ja $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$ ($\omega_0 \gg \Delta\omega$). Koska taajuudet poikkeavat toisistaan, niin myös aaltojen vaihekertoimet poikkeavat toisistaan: $\beta_1 = \beta_0 + \Delta\beta$ ja $\beta_2 = \beta_0 - \Delta\beta$. Tällöin kokonais sähkökentän voimakkuudeksi saadaan (3-43)

$$\begin{aligned} E(z,t) &= E_1(z,t) + E_2(z,t) \\ &= E_0 \left\{ \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z] + \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z] \right\} \\ &= 2E_0 \cos(t\Delta\omega - z\Delta\beta) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z) \end{aligned}$$

Koska $\omega_0 \gg \Delta\omega$, yhtälö () kuvaa nopeasti oskilloivaa aaltoa, jonka kulmataajuus on ω_0 ja jonka amplitudi muuttuu hitaasti kulmataajuudella $\Delta\omega$ (Kuva 2).



Kuva 2. Kahden aikaharmonisen kulkuaallon aiheuttama sähkökenttä.

3.5. Tasoaalto saapuu johdetasolle normaalin suuntaisesti

Oletetaan, että tasoaalto $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ saapuu häviöttömästä väliaineesta ($\sigma_1 = 0$) täydellisen johteen ($\sigma_2 = \infty$) tasopinnalle.

Saapuva tasoaalto kulkee suuntaan $+z$ ja johdetaso on kohdassa $z = 0$. Tällöin saapuvan aallon sähkö- ja magneettikenttien voimakkuudet voidaan esittää yhtälöillä

$$\mathbf{E}_i(z) = E_{i0} e^{-j\beta_1 z} \mathbf{e}_x \text{ ja} \quad (3-43)$$

$$\mathbf{H}_i(z) = \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} \mathbf{e}_y, \quad (3-44)$$

missä E_{i0} on $\mathbf{E}$:n suuruus pisteessä $z = 0$, ja β_1 ja η_1 ovat väliaineen 1 vaihekerroin ja aaltoimpedanssi. Saapuvan aallon Poyntingin vektori $(\mathcal{P}_i(z) = \mathbf{E}_i(z) \times \mathbf{H}_i^*(z))$ on suuntaan $\mathbf{e}_z$, eli energian etenemissuuntaan.

Väliaineessa 2 (täydellisessä johteessa) sekä sähkö- että magneettikenttä katoavat, eli $\mathbf{E}_2 = 0$ ja $\mathbf{H}_2 = 0$. Saapuva aalto heijastuu rajapinnasta aiheuttaen heijastuvan aallon $(\mathbf{E}_r, \mathbf{H}_r)$.

Heijastuvan aallon sähkökentän voimakkuudelle voidaan kirjoittaa yhtälö

$$\mathbf{E}_r(z) = E_{r0} e^{+j\beta_1 z} \mathbf{e}_x, \quad (3-45)$$

jossa positiivinen etumerkki eksponentissa kertoo, että heijastuva aalto kulkee suuntaan $-z$.

Kokonaissähkökentän voimakkuus muodostuu saapuvan ja heijastuvan aallon yhteisvaikutuksesta

$$\mathbf{E}_1(z) = \mathbf{E}_i(z) + \mathbf{E}_r(z) = (E_{i0} e^{-j\beta_1 z} + E_{r0} e^{+j\beta_1 z}) \mathbf{e}_x. \quad (3-46)$$

Sähkökentän voimakkuuden tangentialisen komponentin on oltava jatkuva rajapinnalla $z = 0$:

$$\mathbf{E}_1(0) = (E_{i0} + E_{r0}) \mathbf{e}_x = \mathbf{E}_2(0) = 0. \quad (3-47)$$

Tämän vuoksi on oltava voimassa $E_{r0} = -E_{i0}$.

Tällöin yhtälö 3-47 saa muodon

$$\mathbf{E}_1(z) = E_{i0} (e^{-j\beta_1 z} - e^{+j\beta_1 z}) \mathbf{e}_x = -2jE_{i0} \sin(\beta_1 z) \mathbf{e}_x. \quad (3-48)$$

Heijastuvan aallon magneettikentän voimakkuus $\mathbf{H}_r$ riippuu $\mathbf{E}_r$:stä yhtälön 3-28 mukaisesti

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_r(z) &= \frac{1}{\eta_1} \mathbf{e}_{nr} \times \mathbf{E}_r(z) = \frac{1}{\eta_1} (-\mathbf{e}_z) \times \mathbf{E}_r(z) = \frac{1}{\eta_1} E_{r0} e^{+j\beta_1 z} (-\mathbf{e}_y) \\ &= \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{+j\beta_1 z} (-\mathbf{e}_y) \end{aligned} \quad (3-49)$$

Täten kokonaismagneettikentän voimakkuus saadaan yhdistämällä yhtälöt () ja ()

$$\mathbf{H}_2(z) = \mathbf{H}_i(z) + \mathbf{H}_r(z) = 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \mathbf{e}_y. \quad (3-50)$$

Aikatasossa tarkasteltuna yhtälöt () ja () saavat muodot

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}_1(z) e^{j\omega t} \} = 2E_{i0} \sin(\beta_1 z) \sin(\omega t) \mathbf{e}_x. \text{ ja} \quad (3-51)$$

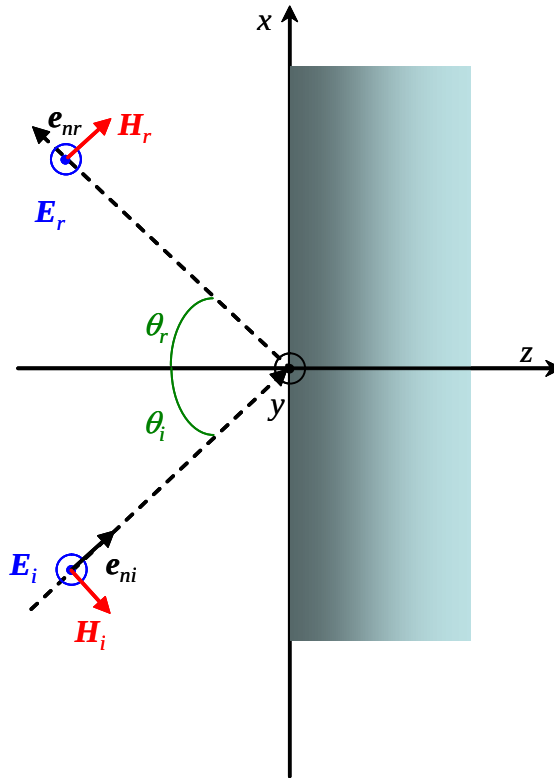
$$\mathbf{H}_2(z, t) = \text{Re} \{ \mathbf{H}_2(z) e^{j\omega t} \} = 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \cos(\omega t) \mathbf{e}_y. \quad (3-52)$$

3.6. Vaino saapuminen tasomaiseen johdepintaan

Kun tasainen tasoaalto saapuu tasomaiseen johdepintaan vinosti, heijastuneen aallon käyttäytyminen riippuu saapuvan aallon polarisaatiosta. Saapuvan aallon sähkökentän voimakkuus $\mathbf{E}_i$ voidaan aina esittää saapumispintaan nähden kohtisuoran ja poikittaisen komponentin avulla.

3.6.1. Kohtisuora (eli horisontaalinen eli $\mathbf{E}$ -) polarisaatio

Kohtisuoran polarisaation tilanteessa saapuvan tasoaallon sähkökentän voimakkuus $\mathbf{E}_i$ on rajapinnan suuntainen (tangentialinen ko. pinnalle).



Kuva 3. Kohtisuora polarisaatio.

Kuvassa 1 merkitään

$$\mathbf{e}_{ni} = \sin \theta_i \mathbf{e}_x + \cos \theta_i \mathbf{e}_z, \quad (3-53)$$

jossa θ_i on tasoaallon saapumiskulma rajapintaan (eli poikkeama kohtisuorasta saapumisesta).

Yhtälön 30 perusteella voidaan kirjoittaa yhtälö

$$\mathbf{E}_i(x, z) = E_{i0} e^{-j\beta_1 \mathbf{e}_{ni} \cdot \mathbf{R}} \mathbf{e}_y = E_{i0} e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \mathbf{e}_y \text{ ja} \quad (3-54)$$

yhtälön 35 perusteella

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(x, z) &= \frac{1}{\eta_1} (\mathbf{e}_{ni} \times \mathbf{E}_i(x, z)) \\ &= \frac{E_{i0}}{\eta_1} (-\cos \theta_i \mathbf{e}_x + \sin \theta_i \mathbf{e}_z) e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \end{aligned} \quad (3-55)$$

Heijastuneelle aallolle

$$\mathbf{e}_{nr} = \sin \theta_r \mathbf{e}_x - \cos \theta_r \mathbf{e}_z, \quad (3-56)$$

jossa θ_r on tasoaallon heijastumiskulma rajapinnasta (eli poikkeama kohtisuorasta heijastumisesta).

Tällöin heijastuneen aallon sähkökentänvoimakkuudeksi saadaan

$$\mathbf{E}_r(x, z) = E_{r0} e^{-j\beta_1 \mathbf{e}_{nr} \cdot \mathbf{R}} \mathbf{e}_y = E_{r0} e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \mathbf{e}_y \quad (3-57)$$

Rajapinnalla $z = 0$ kokonaissähkökentän voimakkuuden on oltava nolla, joten

$$\mathbf{E}_1(x, 0) = \mathbf{E}_i(x, 0) + \mathbf{E}_r(x, 0) = (E_{i0} e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} + E_{r0} e^{-j\beta_1 x \sin \theta_r}) \mathbf{e}_y = 0.$$

Jotta edellinen toteutuisi kaikilla x :n arvoilla, on saapuvan ja heijastuvan sähkökentän voimakkuuden on toteutettava yhtälö: $E_{r0} = -E_{i0}$. Samoin saapumis- ja heijastuskulmien on toteutettava yhtälö: $\theta_r = \theta_i$.

Kun edellä mainitut asiat yhdistetään yhtälöön 3-57, saadaan yhtälöksi

$$\mathbf{E}_r(x, z) = E_{i0} e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} (-\mathbf{e}_y) \quad (3-58)$$

Vastaavasti heijastuneen aallon magneettikentän voimakkuudeksi saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_r(x, z) &= \frac{1}{\eta_1} (\mathbf{e}_{nr} \times \mathbf{E}_r(x, z)) \\ &= \frac{E_{i0}}{\eta_1} (-\cos \theta_i \mathbf{e}_x - \sin \theta_i \mathbf{e}_z) e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} \end{aligned} \quad (3-59)$$

Kokonaissähkökentän voimakkuus yhdistämällä saapuva- ja heijastuva aalto:

$$\mathbf{E}_1(x, z) = \mathbf{E}_i(x, z) + \mathbf{E}_r(x, z) = E_{i0} (e^{-j\beta_1 z \cos \theta_i} - e^{j\beta_1 z \cos \theta_i}) e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} \mathbf{e}_y \quad (3-60)$$

Koska

$$\begin{aligned}
& e^{-j\beta_1 z \cos \theta_i} - e^{j\beta_1 z \cos \theta_i} \\
&= \cos(\beta_1 z \cos \theta_i) - j \sin(\beta_1 z \cos \theta_i) - (\cos(\beta_1 z \cos \theta_i) + j \sin(\beta_1 z \cos \theta_i)) \\
&= -2j \sin(\beta_1 z \cos \theta_i),
\end{aligned}$$

yhtälö 3-60 saa muodon

$$\mathbf{E}_1(x, z) = j2E_{i0} \sin(\beta_1 z \cos \theta_i) e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} (-\mathbf{e}_y). \quad (3-61)$$

Kokonaismagneettikentän voimakkuus: (3-62)

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1(x, z) &= \mathbf{H}_i(x, z) + \mathbf{H}_r(x, z) \\
\Rightarrow \mathbf{H}_1(x, z) &= \frac{1}{\eta_1} (\mathbf{e}_{ni} \times \mathbf{E}_i(x, z)) + \frac{1}{\eta_1} (\mathbf{e}_{nr} \times \mathbf{E}_r(x, z)) \\
\Rightarrow \mathbf{H}_1(x, z) &= \frac{E_{i0}}{\eta_1} \left[(-\cos \theta_i \mathbf{e}_x + \sin \theta_i \mathbf{e}_z) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} + (-\cos \theta_i \mathbf{e}_x - \sin \theta_i \mathbf{e}_z) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} \right] \\
\Rightarrow \mathbf{H}_1(x, z) &= \frac{E_{i0}}{\eta_1} \left[\left(-\cos \theta_i \left(e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} + e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} \right) \mathbf{e}_x \right) + \sin \theta_i \left(e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} - e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} \right) \mathbf{e}_z \right] \\
\Rightarrow \mathbf{H}_1(x, z) &= \frac{E_{i0}}{\eta_1} \left[\left(-\cos \theta_i \cdot 2 \cos(\beta_1 z \cos \theta_i) e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} \mathbf{e}_x \right) - \sin \theta_i \cdot j2 \sin(\beta_1 z \cos \theta_i) e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} \mathbf{e}_z \right] \\
\Rightarrow \mathbf{H}_1(x, z) &= \frac{2E_{i0}}{\eta_1} \left[\left(\cos \theta_i \cos(\beta_1 z \cos \theta_i) e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} (-\mathbf{e}_x) \right) - j \sin \theta_i \sin(\beta_1 z \cos \theta_i) e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} \mathbf{e}_z \right]
\end{aligned}$$

Yhtälöt 3-61 ja 3-62 näyttävät melkoisen monimutkaisilta yhtälöiltä. Voimme kuitenkin tehdä seuraavat huomiot tilanteesta, jossa kohtisuorasti polarisoitunut tasoaalto saapuu vinosti johtavan tason rajapinnalle:

- 1) Rajapinnan normaalin suunnassa (eli tässä tapauksessa z-suunnassa) E_{1y} ja H_{1x} ylläpitävät seisovan aallon kuvioita ($\sin(\beta_{1z} z)$ ja $\cos(\beta_{1z} z)$ mukaisesti, missä $\beta_{1z} = \beta_1 \cos \theta_1$). Keskimääräistä tehoa ei etene lainkaan tähän suuntaan, koska sekä E_{1y} että H_{1x} ovat 90° vaihesiirrossa aikatasossa.
- 2) Rajapinnalle poikittaisessa suunnassa (eli tässä tapauksessa x-suunnassa) E_{1y} ja H_{1z} ovat molemmat aika- ja taajuustasossa ja etenevät vaihenopeudella

$$v_{1x} = \frac{\omega}{\beta_{1x}} = \frac{\omega}{\beta_1 \sin \theta_i} = \frac{v_1}{\sin \theta_i}. \quad (3-63)$$

Aallon nopeus em. suuntaan on

$$\lambda_{1x} = \frac{2\pi}{\beta_{1x}} = \frac{\lambda_1}{\sin \theta_i}. \quad (3-64)$$

- 3) x -suuntaan ko. aalto ei ole tasainen tasoaalto, koska sen amplitudi vaihtelee z :n mukaan.
- 4) Koska $E_1 = 0$ kaikilla x :n arvoilla, kun $\sin(\beta_1 z \cos \theta_i) = 0$ tai kun

$$\beta_1 z \cos \theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_1} z \cos \theta_i = -m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

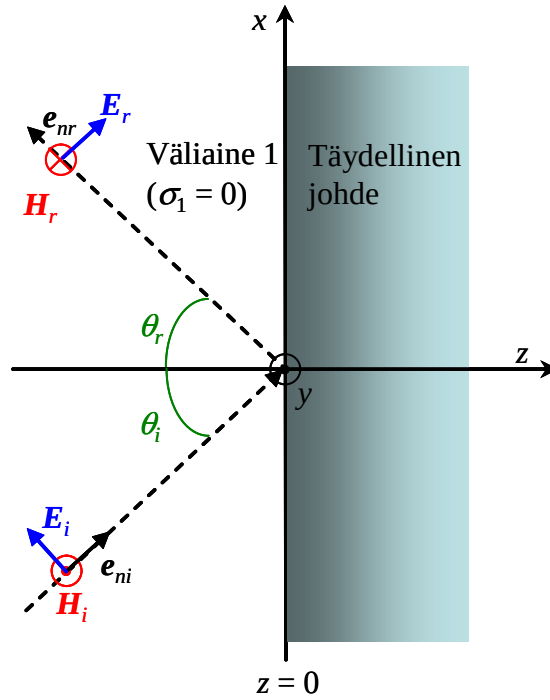
johtava taso voidaan sijoittaa paikkaan

$$z = -\frac{m\lambda_1}{2 \cos \theta_i}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3-65)$$

ilman, että kenttäkuvio, joka sijaitsee johtavan tason ja kohdassa $z = 0$ olevan johtavan rajapinnan välissä, muuttuu. Poikittaissähköinen aalto (transverse (TE) electric wave) ($E_{1x} = 0$) ponnahtelee edestakaisin johtavien tasojen välillä ja etenee x -suuntaan.

3.6.2. Pysty (eli vertikaalinen eli H -) polarisaatio

Oletetaan, että E_1 sijaitsee saapuvalla tasolla, kun tasoaalto törmää vinosti täydellisesti johtavan tason rajapintaan (Kuva 4).



Kuva 4. Pystypolarisaatio.

Yksikkövektorit $\mathbf{e}_{ni}$ ja $\mathbf{e}_{nr}$ kuvaavat saapuvan ja heijastuvan aallon etenemissuuntia (kts. yhtälöt 3-53 ja 3-56). Sekä $\mathbf{E}_i$:llä että $\mathbf{E}_r$:llä on nyt komponentit sekä x - että z -suuntaan; $\mathbf{H}_i$:llä että $\mathbf{H}_r$:llä on komponentit vain y -suuntaan. Saapuvalla aallolla voidaan nyt kirjoittaa yhtälöt

$$\mathbf{E}_i(x, z) = E_{i0} (\cos \theta_i \mathbf{e}_x - \sin \theta_i \mathbf{e}_z) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \text{ ja} \quad (3-66)$$

$$\mathbf{H}_i(x, z) = \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \mathbf{e}_y. \quad (3-67)$$

Heijastuvalla aallolla ($\mathbf{E}_r, \mathbf{H}_r$) voidaan kirjoittaa yhtälöt

$$\mathbf{E}_r(x, z) = E_{r0} (\cos \theta_r \mathbf{e}_x + \sin \theta_r \mathbf{e}_z) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \text{ ja} \quad (3-68)$$

$$\mathbf{H}_r(x, z) = \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} (-\mathbf{e}_y). \quad (3-69)$$

Täydellisen johteen pinnalla ($z = 0$) kokonaissähkökentän voimakkuuden tangentialisen (eli nyt x -suuntaisen) komponentin on kadottava kaikilla x :n arvoilla eli

$$E_{ix}(x, 0) + E_{rx}(x, 0) = E_{i0}(\cos \theta_i \mathbf{e}_x) e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} + E_{r0}(\cos \theta_r \mathbf{e}_x) e^{-j\beta_1 x \sin \theta_r} = 0. \quad (3-70)$$

Jotta yhtälö 3-70 toteutuisi kaikilla x :n arvoilla, on saapuvan ja heijastuvan sähkökentän voimakkuuden on toteutettava yhtälö: $E_{r0} = -E_{i0}$. Samoin saapumis- ja heijastuskulmien on toteutettava yhtälö: $\theta_r = \theta_i$. Väliaineessa 1 oleva kokonaissähkökenttä saadaan yhdistämällä yhtälöt 3-66 ja 3-68

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(x, z) &= \mathbf{E}_i(x, z) + \mathbf{E}_r(x, z) \\ &= E_{i0} \left[\cos \theta_i \left(e^{-j\beta_1 z \cos \theta_i} - e^{j\beta_1 z \cos \theta_i} \right) \mathbf{e}_x - \sin \theta_i \left(e^{-j\beta_1 z \cos \theta_i} + e^{j\beta_1 z \cos \theta_i} \right) \mathbf{e}_z \right] e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} \\ &= 2E_{i0} \left[j \cos \theta_i \sin(\beta_1 z \cos \theta_i) (-\mathbf{e}_x) - \sin \theta_i \cos(\beta_1 z \cos \theta_i) \mathbf{e}_z \right] e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} \end{aligned} \quad (3-71)$$

Yhtälöt 3-67 ja 3-69 yhdistämällä saadaan kokonaismagneettikentän voimakkuudeksi väliaineessa 1

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(x, z) &= \mathbf{H}_i(x, z) + \mathbf{H}_r(x, z) \\ &= \frac{E_{i0}}{\eta_1} \left(e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} + e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \right) \mathbf{e}_y \\ &= \frac{2E_{i0}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z \cos \theta_i) e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (3-72)$$

Yhtälöiden 3-71 ja 3-72 tulkinta on vastaava kuin yhtälöiden 3-61 ja 3-62 kohtisuoran polarisaation tilanteessa. Pystypolarisaation tilanteessa on kuitenkin sähkökentänvoimakkuudella $\mathbf{E}_1(x, z)$ komponentit sekä x - että z -suuntaan, eikä magneettikentänvoimakkuudella $\mathbf{H}_1(x, z)$, kuten oli kohtisuoran polarisaation tilanteessa.

Joten pystypolarisaation tilanteessa voimme tehdä seuraavat huomiot:

- 1) Rajapinnan normaalin suunnassa (eli tässä tapauksessa z -suunnassa) E_{1x} ja H_{1y} yläpitävät seisovan aallon kuvioita ($\sin(\beta_{1z} z)$ ja $\cos(\beta_{1z} z)$) mukaisesti, missä

$\beta_{1z} = \beta_1 \cos \theta_1$). Keskimääräistä tehoa ei etene lainkaan tähän suuntaan, koska sekä E_{1x} että H_{1y} ovat 90° vaihesiirrossa aikatasossa.

- 2) Rajapinnalle poikittaisessa suunnassa (eli tässä tapauksessa x -suunnassa) E_{1z} ja H_{1z} ovat molemmat aika- ja taajuustasossa ja etenevät vaihenopeudella $v_{1x} = \frac{v_1}{\sin \theta_i}$, kuten kohtisuorankin polarisaation tilanteessa.
- 3) Kuten kohtisuorankin polarisaation tilanteessa: x -suuntaan ko. aalto ei ole tasainen tasoaalto, koska sen amplitudi vaihtelee z :n mukaan.
- 4) Johtavan tason lisääminen tasolle $z = -\frac{m\lambda_1}{2 \cos \theta_i}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), jossa $E_{1x} = 0$ kaikilla x :n arvoilla, ei vaikuta kenttäkuvioon, joka sijaitsee johtavan tason ja kohdassa $z = 0$ olevan johtavan rajapinnan välissä. Poikittaismagneettinen aalto (transverse magnetic (TM) wave) ($H_{1x} = 0$) etenee x -suuntaan.

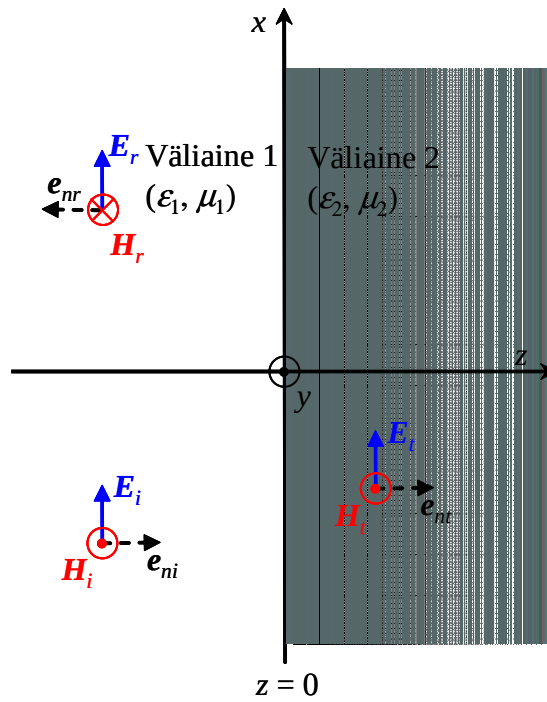
E_1 :n ja H_1 :n yhtälöt tilanteessa, jossa tasoaalto saapuu vinosti johtavan tason rajapintaan, saadaan saapuvien ja heijastuvien aaltojen summana. Ne saavat aikaan interferenssikuvion. Jos saapuva aalto on suljettu kapeaan keilaan, myös heijastunut aalto on kapea keila, joka etenee eri suuntaan. Saapuva ja heijastuva aalto eivät aiheuta interferenssikuviota muualla, kuin aivan pienellä alueella johtavan tason läheisyydessä. Täten heijastimet mikroaaltojen välitystorneissa vastaanottavat, vahvistavat ja lähettävät alkuperäisen saapuneen aallon, ei interferenssiaaltoa.

3.7. Tasoaalto saapuu eristeiden rajapinnalle

Kun sähkömagneettinen aalto saapuu eristeaineiden rajapinnalle, jossa väliaineiden aaltoimpedanssi poikkeaa toisistaan, osa saapuneesta aallosta heijastuu rajapinnasta ja osa kulkee väliaineesta toiseen. Tällöin on tarkasteltava kahta eri tilannetta: kun aalto saapuu rajapinnalle rajapinnan normaalin suuntaisesti tai vinosti. Oletetaan, että kumpikin tarkasteltava väliaine on häviötön eli $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

3.7.1. Normaalinen suuntainen saapuminen rajapinnalle

Tarkastellaan tilannetta, missä saapuva aalto etenee suuntaan z ja eristeiden rajapinta on tasolla $z = 0$ (Kuva 5).



Kuva 5. Normaalinen suuntainen saapuminen rajapinnalle

Saapuvan aallon sähkö- ja magneettikentän voimakkuuksien yhtälöt ovat samat kuin yhtälöt 3-43 ja 3-44

$$\mathbf{E}_i(z) = E_{i0} e^{-j\beta_1 z} \mathbf{e}_x \text{ ja} \quad (3-73)$$

$$\mathbf{H}_i(z) = \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} \mathbf{e}_y. \quad (3-74)$$

Koska tasolla $z = 0$ on väliaineessa epäjatkuvuuskohta, osa saapuvasta aallosta heijastuu rajapinnasta ja osa kulkee väliaineeseen 2. Tällöin saadaan heijastuvalle aallolle yhtälöt

$$\mathbf{E}_r(z) = E_{r0} e^{j\beta_1 z} \mathbf{e}_x \text{ ja} \quad (3-75)$$

$$\mathbf{H}_r(z) = \frac{1}{\eta_1} \mathbf{e}_{nr} \times \mathbf{E}_r(z) = \frac{1}{\eta_1} (-\mathbf{e}_z) \times \mathbf{E}_r(z) = \frac{1}{\eta_1} E_{r0} e^{i\beta_1 z} (-\mathbf{e}_y) = \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{i\beta_1 z} (-\mathbf{e}_y), \quad (3-76)$$

ja väliaineeseen 2 kulkevalle aallolle yhtälöt

$$\mathbf{E}_t(z) = E_{t0} e^{-i\beta_2 z} \mathbf{e}_x \text{ ja} \quad (3-77)$$

$$\mathbf{H}_t(z) = \frac{1}{\eta_2} \mathbf{e}_{nt} \times \mathbf{E}_t(z) = \frac{1}{\eta_2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t(z) = \frac{1}{\eta_2} E_{t0} e^{-i\beta_2 z} \mathbf{e}_y = \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-i\beta_2 z} \mathbf{e}_y, \quad (3-78)$$

joissa E_{i0} on $\mathbf{E}_i$:n suuruus pisteessä $z = 0$, ja β_2 ja η_2 ovat väliaineen 2 vaihekerroin ja aaltoimpedanssi.

$\mathbf{E}_r$:ta ja $\mathbf{E}_t$:ta kuvaavien nuolien suunnat ovat mielivaltaiset (Kuva 5), koska niiden todelliset suunnat riippuvat väliaineiden aaltoimpedanssien suhteesta.

Yhtälöissä 3-75 ... 3-78 esiintyvät sähkökentän voimakkuuksien E_{r0} ja E_{t0} suuruudet määritetään rajapintaehtojen avulla. Väliaineiden rajapinnalla ($z = 0$) sähkö- ja magneetikenttien voimakkuuksien tangentialisten (eli tässä tilanteessa x -suuntaisten) komponenttien tulee olla jatkuvia. Tällöin saadaan väliaineiden rajapinnalla yhtälöiksi

$$\mathbf{E}_i(z) + \mathbf{E}_r(z) = \mathbf{E}_t(z) \text{ tai } E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \text{ ja} \quad (3-79)$$

$$\mathbf{H}_i(z) + \mathbf{H}_r(z) = \mathbf{H}_t(z) \text{ tai } \frac{1}{\eta_1} (E_{i0} + E_{r0}) = \frac{E_{t0}}{\eta_2}. \quad (3-80)$$

Ratkaisemalla yhtälöt 3-79 ja 3-80 saadaan yhtälöt

$$E_{r0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0} \text{ ja} \quad (3-81)$$

$$E_{t0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0}. \quad (3-82)$$

Yhtälöstä 3-81 saadaan ratkaistua heijastuskertoimen yhtälö

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (3-83)$$

ja yhtälöstä 3-82 läpäisykerroin

$$\tau = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} . \quad (3-84)$$

Heijastuskertoimen Γ arvo voi olla joko positiivinen tai negatiivinen riippuen väliaineiden aaltoimpedanssien η_1 ja η_2 suuruuksista; läpäisykerroin τ on aina positiivinen.

Yhtälöt 3-83 ja 3-84 ovat voimassa myös väliaineiden ollessa häviöllisiä. Tällöin kuitenkin aaltoimpedanssien arvot ovat kompleksilukukuja, joten myös heijastus- ja läpäisykertoimien arvot tulevat kompleksisiksi. Kompleksinen heijastus/läpäisykerroin tarkoittaa sitä, että heijastuneella/läpi menneellä aallolla on vaihe-ero saapuneeseen aaltoon verrattuna.

Heijastus- ja läpäisykertoimet ovat riippuvaisia toisistaan yhtälön

$$\Gamma + 1 = \tau \quad (3-85)$$

mukaisesti.

Jos väliaine 2 on täydellinen johde ($\sigma_2 = \infty$), aaltoimpedanssi on

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = 0, \quad (3-86)$$

heijastuskerroin väliaineiden rajapinnasta

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{-\eta_1}{\eta_1} = -1 \text{ ja} \quad (3-87)$$

läpäisykerroin

$$\tau = \Gamma + 1 = 0. \quad (3-88)$$

Joten $E_{r0} = -E_{i0}$ ja $E_{t0} = 0$. Saapuva aalto heijastuu kokonaan ja väliaineeseen 1 muodostuu seisova aalto.

Jos väliaine 2 ei ole täydellinen johde, vain osa aallosta heijastuu takaisin väliaineeseen 1. Tällöin kokonaissähkökentän voimakkuus väliaineessa 1 määritetään yhtälöllä

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(z) &= \mathbf{E}_i(z) + \mathbf{E}_r(z) = E_{i0} (e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z}) \mathbf{e}_x \\ &= E_{i0} \left[(1 + \Gamma) e^{-j\beta_1 z} + \Gamma (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) \right] \mathbf{e}_x, \quad (3-89) \\ &= E_{i0} \left[(1 + \Gamma) e^{-j\beta_1 z} + j2\Gamma \sin(\beta_1 z) \right] \mathbf{e}_x = E_{i0} \left[\tau e^{-j\beta_1 z} + j2\Gamma \sin(\beta_1 z) \right] \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

Yhtälön 3-89 perusteella voidaan todeta, että kokonaissähkökentän voimakkuus $\mathbf{E}_1$ muodostuu kulkuaallosta, jonka amplitudi on $\tau \mathbf{E}_{i0}$ ja sekä seisovasta aallosta, jonka amplitudi on $2\Gamma E_{i0}$. Ko. kulkuaallosta johtuen kokonaiskenttä $\mathbf{E}_1(z)$ ei mene nolllaksi, vaan sille voidaan löytää tietyt minimi- ja maksimiarvot.

Sähkökentän voimakkuuden $|\mathbf{E}_1(z)|$ minimi- ja maksimiarvojen paikat voidaan määrittää yhtälön

$$\mathbf{E}_1(z) = E_{i0} (e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z}) \mathbf{e}_x = E_{i0} e^{-j\beta_1 z} (1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z}) \mathbf{e}_x \quad (3-90)$$

perusteella.

Häviöttömissä väliaineissa aaltoimpedanssit η_1 ja η_2 ovat reaalisia, joten myös Γ ja τ ovat reaalisia. Heijastuskerroin voi kuitenkin saada joko positiivisen tai negatiivisen arvon.

1) Olkoon $\Gamma > 0$ ($\eta_2 > \eta_1$).

$|\mathbf{E}_1(z)|$ saa maksimiarvonsa $E_{i0}(1 + \Gamma)$, kun $2\beta_1 z_{\max} = -2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), eli kun

$$z_{\max} = -\frac{n\pi}{\beta_1} = -\frac{n\lambda_1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3-91)$$

$|E_1(z)|$ saa minimiarvonsa $E_{i0}(1-\Gamma)$, kun $2\beta_1 z_{\min} = -(2n+1)\pi$ ($n=0,1,2,\dots$), eli kun

$$z_{\min} = -\frac{(2n+1)\pi}{2\beta_1} = -\frac{(2n+1)\lambda_1}{4}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (3-92)$$

2. Olkoon $\Gamma < 0$ ($\eta_2 < \eta_1$).

$|E_1(z)|$ saa maksimiarvonsa $E_{i0}(1-\Gamma)$, kun $2\beta_1 z_{\min} = -(2n+1)\pi$ ($n=0,1,2,\dots$), eli kun

$$z_{\min} = -\frac{(2n+1)\pi}{2\beta_1} = -\frac{(2n+1)\lambda_1}{4}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (3-93)$$

$|E_1(z)|$ saa minimiarvonsa $E_{i0}(1+\Gamma)$, kun $2\beta_1 z_{\max} = -2n\pi$ ($n=0,1,2,\dots$), eli kun

$$z_{\max} = -\frac{n\pi}{\beta_1} = -\frac{n\lambda_1}{2}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (3-94)$$

Seisovan aallon sähkökentän voimakkuuden maksimi- ja minimiarvon välistä suhdetta kutsutaan seisovan aallon suhteeksi (standing-wave ratio (SWR))

$$S = \text{SAS} = \text{SWR} = \frac{|E|_{\max}}{|E|_{\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}. \quad (3-95)$$

Toisaalta

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1}. \quad (3-96)$$

Koska heijastuskertoimen $|\Gamma|$ arvo voi vaihdella välillä $-1\dots 1$, niin seisovan aallon suhteen arvo voi vaihdella $0\dots\infty$. Seisovan aallon suhde S esitetäänkin usein logaritmisella asteikolla.

Magneettikentän kokonaisvoimakkuus väliaineessa 1 saadaan yhdistämällä yhtälöissä 3-74 ja 3-76 esitetyt saapuva (H_i) ja heijastuva (H_r) aalto

$$\mathbf{H}_1(z) = \mathbf{H}_i(z) + \mathbf{H}_r(z) = \frac{E_{i0}}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z}) \mathbf{e}_y = \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} (1 - \Gamma e^{j2\beta_1 z}) \mathbf{e}_y. \quad (3-97)$$

Kun verrataan yhtälöä 3-97 aikaisempaan sähkökentän kokonaisvoimakkuuden $\mathbf{E}_1(z)$ yhtälöön 3-90, voidaan todeta, että heijastuskerroin Γ on reaalin häviöttömässä aineessa ja että magneettikentän voimakkuus $|\mathbf{H}_1(z)|$ saa minimiarvonsa, kun sähkökentän voimakkuus $|\mathbf{E}_1(z)|$ saa maksimiarvonsa (ja päinvastoin).

Väliaineessa 2 aalto $(\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t)$ kulkee suuntaan z . Yhtälöiden 3-77 ja 3-88 perusteella väliaineessa 2 sähkökentän voimakkuus

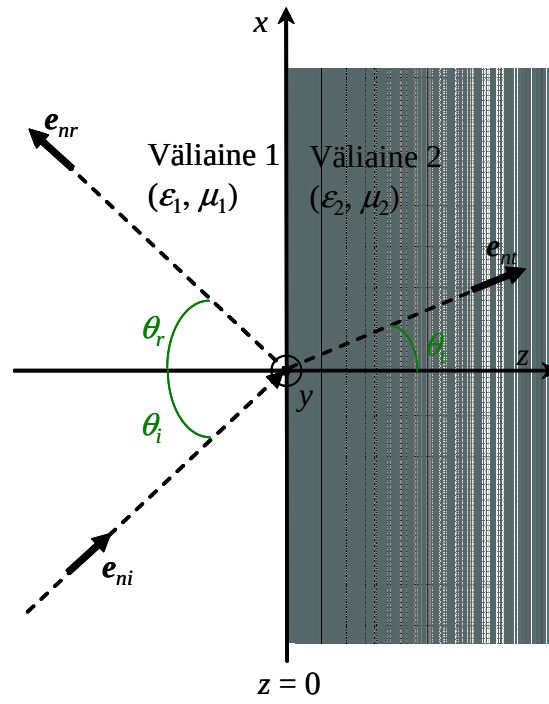
$$\mathbf{E}_t(z) = \tau E_{i0} e^{-j\beta_2 z} \mathbf{e}_x \quad \text{ja} \quad (3-98)$$

magneettikentän voimakkuus yhtälön 3-78 perusteella

$$\mathbf{H}_t(z) = \frac{\tau E_{i0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z} \mathbf{e}_y. \quad (3-99)$$

3.7.2. Vaino saapuminen rajapinnalle

Tarkastellaan tilannetta, missä saapuva aalto kohtaa tasolla $z = 0$ olevan (häviöttömien) väliaineiden rajapinnan vinosti (Kuva 6).



Kuva 6. Tasoaalto kohtaa väliaineiden rajapinnan vinosti.