VAASAN YLIOPISTO

TEKNILLINEN TIEDEKUNTA

SÄHKÖTEKNIIKKA

Maarit Vesapuisto

SATE.2010 DYNAAMINEN KENTTÄTEORIA:
KAPPALE 1: JOHDANTO
KAPPALE 2:
AJAN MUKAAN MUUTTUVAT KENTÄT JA MAXWELLIN YHTÄLÖT

Opetusmoniste (Raaka versio)

Vaasassa 28.10.2009

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO

Opintojaksossa SATE.2010 Dynaaminen kenttäteoria käsitellään sähkömagneettisten aaltojen käyttäytymistä dynaamisessa eli ajan mukaan muuttuvassa tilanteessa. Opintojakson välttämättöminä esitietoina on opintojakso SATE.1060 Staattinen kenttäteoria, jossa sähkö- ja magneettikenttiä on tarkasteltu staattisessa eli ajan mukaan muuttumattomassa tilanteessa.

2. AJAN MUKAAN MUUTTUVAT KENTÄT JA MAXWELLIN YHTÄLÖT

2.1. Johdanto

Opintojaksossa SATE.1050 Staattinen kenttäteoria on johdettu ja tarkasteltu Maxwellin yhtälöitä staattisille sähkö ja magneettikentille.

Sähköstaattisessa tilanteessa sähkökenttien laskennassa sähkökentän voimakkuuden $\boldsymbol{E}$ ja sähkövuontiheyden $\boldsymbol{D}$ määrittämisessä käytettävät differentiaaliyhtälöt ovat

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 \text{ ja} \tag{2-1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho \,. \tag{2-2}$$

Lisäksi lineaarisessa ja isotrooppisessa (ei välttämättä homogeenisessa) väliaineessa sähkökentän voimakkuuden ja sähkövuontiheyden välillä on voimassa väliaineyhtälö

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \,. \tag{2-3}$$

Magnetostaattisessa tilanteessa magneettikenttien laskennassa magneettikentän voimakkuuden $\boldsymbol{H}$ ja magneettivuontiheyden $\boldsymbol{B}$ määrittämisessä käytettävät differentiaaliyhtälöt ovat

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \text{ ja} \tag{2-4}$$

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \,. \tag{2-5}$$

Lisäksi lineaarisessa ja isotrooppisessa väliaineessa magneettikentän voimakkuuden ja magneettivuontiheyden välillä on voimassa väliaineyhtälö

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B} \,. \tag{2-6}$$

Yhtälöistä 2-1 … 2-6 voidaan havaita ja todeta, että staattisessa (ei ajan mukaan muuttuvassa) tilanteessa sähkökentän vektorit ($\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{D}$) ja magneettikentän vektorit ($\boldsymbol{H}$ ja $\boldsymbol{B}$) ovat muodostavat erilliset ja toisistaan riippumattomat yhtälöt.

2.2. Faradayn laki ja sähkömagneettinen induktio

Faradayn laki

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2-7}$$

kuvaa indusoituneen sähkömotorisen voiman $\boldsymbol{E}$ ja magneettivuontiheyden $\boldsymbol{B}$ muutoksen välistä yhteyttä. Yhtälö on voimassa jokaisessa tarkasteluavaruuden pisteessä (ja riippumaton tarkasteluavaruuden materiaalista). Täten sähkökentän voimakkuutta $\boldsymbol{E}$ ei voi esittää skalaaripotentiaalin V gradienttina alueessa, jossa on muuttuva magneettivuontiheys $\boldsymbol{B}$.

Ottamalla pintaintegraali yhtälön 2-7 molemmilta puolilta ja soveltamalla Stokesin teoreemaa yhtälö saadaan muotoon

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \,. \tag{2-8}$$

2.2.1. Ajan mukaan muuttuvassa magneettikentässä oleva liikkumaton piiri

Jos piiri pysyy paikallaan alueessa S, voidaan yhtälö 2-8 kirjoittaa muotoon

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \,. \tag{2-9}$$

Määritellään ääriviivalla C olevaan piiriin indusoitunut sähkömotorinen voima U_{smv}

$$U_{\mathrm{smv}} = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \;\; [\mathrm{V}] \text{ ja} \tag{2-10}$$

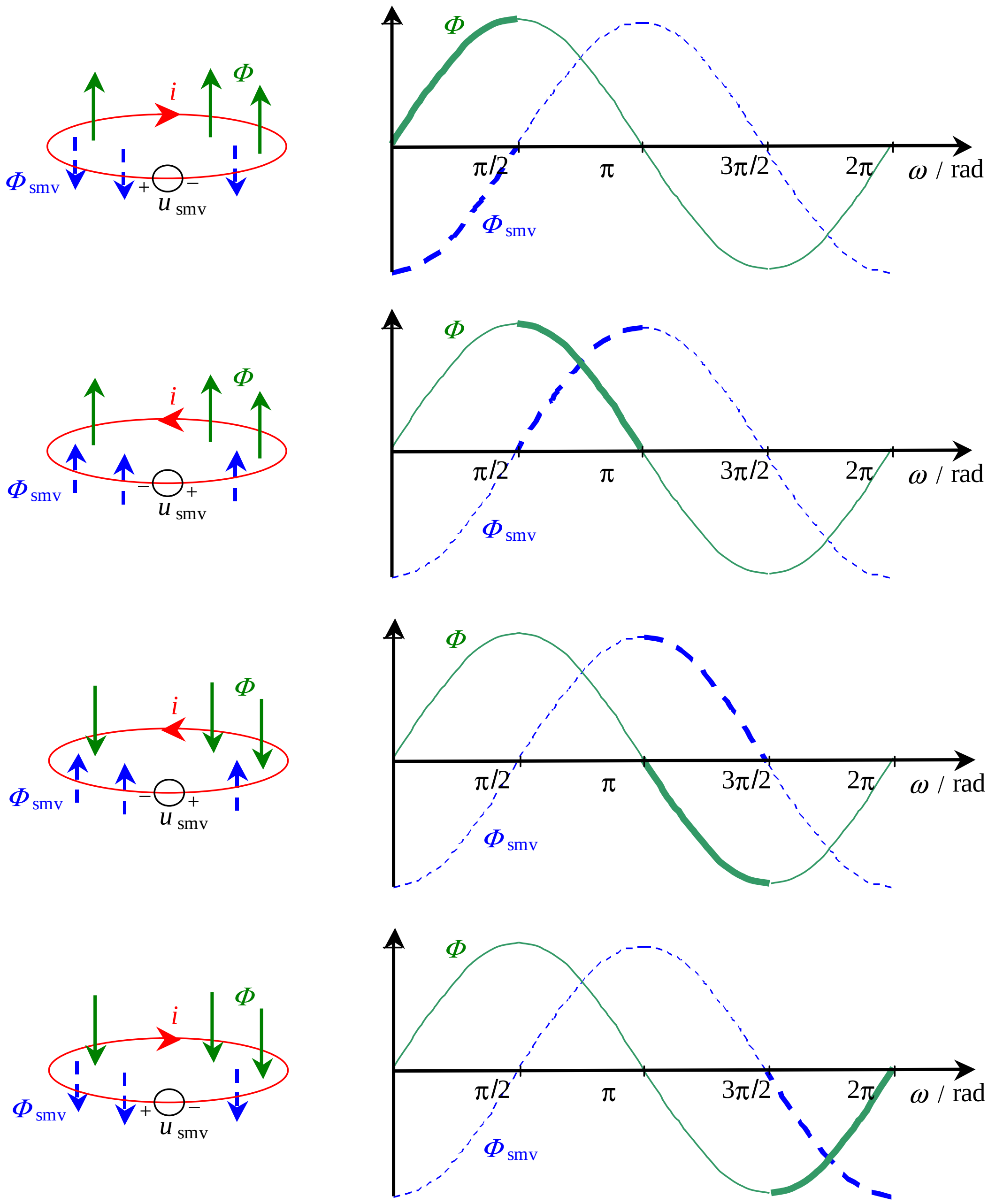
alueen S läpi kulkeva magneettivuo $\boldsymbol{\Phi}$

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \;\; [\mathrm{Wb}]. \tag{2-11}$$

Tällöin kaava 2-8 voidaan kirjoittaa muotoon

$$U_{\mathrm{smv}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\ [\mathrm{V}], \tag{2-12}$$

jonka mukaan paikallaan olevaan suljettuun piiriin indusoituva sähkömotorinen voima on yhtä suuri kuin ko. suljetun piirin läpi kulkevan magneettivuon kasvu negatiivisena. -> Lenzin laki: suljettuun piiriin indusoituu sähkömotorinen voima, joka aiheuttaa silmukan läpi kulkevan magneettivuon muutokselle vastakkaisen magneettivuon (Kuva 1).



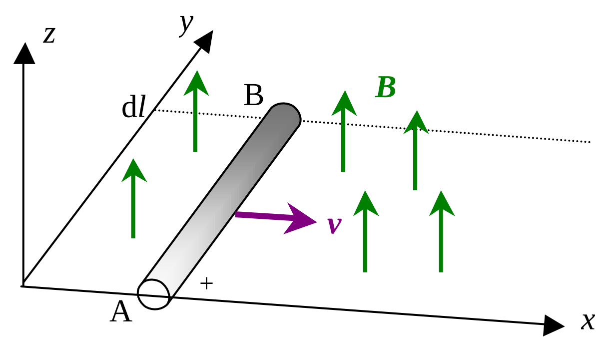
Kuva 1. Suljettuun silmukkaan indusoituva sähkömotorinen voima U_{smv}.

2.2.2. Staattisessa magneettikentässä liikkuva johdin

Kun johdin liikkuu nopeudella $\boldsymbol{v}$ staattisessa (ajan mukaan muuttumattomassa) magneettikentässä $\boldsymbol{B}$, niin voima

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{2-13}$$

aiheuttaa sen, että johtimessa vapaasti liikkuvat elektronit siirtyvät johtimen toiseen päähän (Kuva 2: B), jättäen johtimen toisen pään positiivisesti varautuneeksi (Kuva 2: A). Tämä positiivisten ja negatiivisten varausten erkautuminen aiheuttaa Coulombian vetovoiman. Varausten erkautuminen jatkuu, kunnes sähköiset ja magneettiset voimat tasapainottavat toisensa. Tasapainotilassa, joka saavutetaan erittäin nopeasti, vapaitten varausten nettovoima liikkuvassa johtimessa on nolla.



Kuva 2. Liikkuva johdin staattisessa magneettikentässä.

Jos liikkuva johdin on osa suljettua piiriä C, piiriin muodostuu sähkömotorinen voima

$$U_{\mathrm{smv}} = \oint_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \;\; [\mathrm{V}], \tag{2-14}$$

jota kutsutaan vuon leikkaavaksi sähkömotoriseksi voimaksi tai liikkeestä johtuvaksi sähkömotoriseksi voimaksi.

2.2.3. Liikkuva johdin ajan mukaan muuttuvassa magneettikentässä

Kun varaus q liikkuu nopeudella $\boldsymbol{v}$ alueessa, jossa on olemassa sekä sähkökenttä $\boldsymbol{E}$ että magneettikenttä $\boldsymbol{B}$, varaukseen q vaikuttaa Lorenzin yhtälön mukaisesti voima

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right). \tag{2-15}$$

Jos ajatellaan havainnoitsijan liikkuvan samalla nopeudella samaan suuntaan varauksen q kanssa, ei ole olemassa näennäistä liikettä, ja varaukseen q vaikuttava voima voidaan tulkita aiheutuvan sähkökentästä ***E’***

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \ \text{ tai} \tag{2-16}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{2-17}$$

Jos johtava piiri C ja pinta-ala S liikkuvat nopeudella $\boldsymbol{v}$ kentässä (***E’***, ***B***) piiriin muodostuvaksi kokonaissähkömotoriseksi voimaksi saadaan kaavojen 2-8 ja 2-17 avulla

$$\oint_C \boldsymbol{E}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_C \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \mathrm{d}l \ \left[\mathrm{V}\right]. \tag{2-18}$$

Yhtälö 2-18 on Faradayn lain yleinen muoto ajan mukaan muuttuvassa magneettikentässä liikkuvalle piirille.

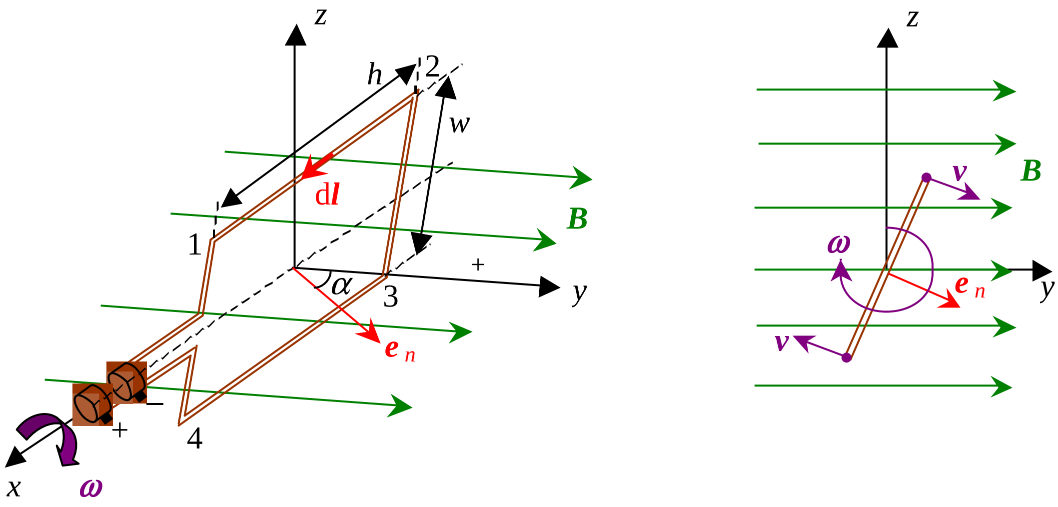
Esimerkki 1.

Suorakaiteen muotoinen (korkeus h, leveys w) johdinsilmukka on sijoitettu (Kuva 3) muuttuvaan magneettikenttään $\boldsymbol{B} = B_0 \sin \omega t \, \boldsymbol{e}_y$. Silmukan muodostamalle tasolle kohtisuora normaali $\boldsymbol{e}_n$ muodostaa kulman α y-akselin suuntaisen yksikkövektorin $\boldsymbol{e}_y$ kanssa. Määritä silmukkaan indusoitunut sähkömotorinen voima, a) kun silmukka on levossa ja b) kun silmukka pyörii x-akselin ympäri kulmanopeudella ω.

Ratkaisu:

a) Kun silmukka on levossa, silmukan läpi kulkeva magneettivuo Φ voidaan ratkaista yhtälöllä 2-11

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \int_0^w \int_0^h B_0 \sin \omega t \, \boldsymbol{e}_y \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_n \\
&= B_0 hw \sin \omega t \cos \alpha.
\end{aligned}$$



Kuva 3. Suorakaiteen muotoinen pyörivä silmukka muuttuvassa magneettikentässä.

Tällöin silmukkaan indusoituva sähkömotorinen voima on

$$U_{\text{asmv}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B_0 S\omega \cos\omega t \cos\alpha, \tag{2-19}$$

missä $S = hw$ on silmukan pinta-ala. Esimerkki tilanteessa (Kuva 3) silmukan päässä 1 on matalampi potentiaali kuin silmukan päässä 4, eli jos silmukka on kytketty ulkoiseen kuormaan, virta tulee kiertämään silmukassa ”vastapäivään”.

b) Kun silmukka pyörii x-akselin ympäri, silmukkaan muodostuva sähkömotorinen voima lasketaan yhtälöllä (2-18). Muuttuvasta kentästä aiheutuva sähkömotorinen voima on määritetty a-kohdassa ja pyörimisliikkeen aiheuttama sähkömotorisen voiman muutos saadaan laskettua yhtälöllä

$$\begin{aligned} U_{\text{bsmv}} &= \oint_C (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &= \int_2^1 \left(\left(\frac{w}{2}\omega \boldsymbol{e}_n \right) \cdot \left(B_0 \sin\omega t \boldsymbol{e}_y \right) \right) \cdot \left(\mathrm{d}x \boldsymbol{e}_x \right) + \int_4^3 \left(\left(-\frac{w}{2}\omega \boldsymbol{e}_n \right) \cdot \left(B_0 \sin\omega t \boldsymbol{e}_y \right) \right) \cdot \left(\mathrm{d}x \boldsymbol{e}_x \right) \\ &= 2\left(\frac{w}{2}\omega B_0 \sin\omega t \sin\alpha \right) h. \end{aligned}$$

Silmukan sivuihin 2->3 ja 4->1 ei indusoidu sähkömotorista voimaa, koska sivuilla ei ole $\boldsymbol{e}_x$ suuntaista komponenttia. Jos kulma $\alpha = 0$ ajanhetkellä $t = 0$, niin $\alpha = \omega t$ ja

$$U_{\mathrm{bsmv}} = B_0 \omega S \sin \omega t \sin \omega t. \tag{2-20}$$

Silmukkaan muodostuva kokonais sähkömotorinen voima koostuu muuttuvan magneettikentän () ja silmukan liikkeen () yhteisvaikutuksesta

$$U_{\mathrm{smv}} = -B_0 S \omega \left(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t \right) = -B_0 S \omega \cos 2\omega t. \tag{2-21}$$

Silmukkaan muodostuva kokonais sähkömotorinen voima voidaan määrittää myös suoraan määrittämällä ensin silmukan läpi kunakin ajanhetkenä kulkeva kokonaisvuo

$$\Phi(t) = \boldsymbol{B}(t) \cdot \left[S\boldsymbol{e}_n(t) \right] = B_0 S \sin \omega t \cos \alpha$$

ja sen jälkeen sähkömotorinen voima

$$U_{\mathrm{smv}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} B_0 S \sin 2\omega t \right) = -B_0 S \omega \cos 2\omega t.$$

2.3. Maxwellin yhtälöt

Sähkömagneettista induktiota tarkastellessa voitiin todeta, että ajan mukaan muuttuva magneettikenttä aiheuttaa muutoksen sähkökentässä. Kun tämä huomioidaan, saadaan staattisen tilanteessa tarkastellut Maxwellin yhtälöt muotoon

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2-22a}$$

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}, \tag{2-22b}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho \text{ ja} \tag{2-22c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{2-22d}$$

Lisäksi on huomioitava varausten häviämättömyyden laki, joka voidaan esittää matemaattisella yhtälöllä

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} . \tag{2-23}$$

Jos yllä olevan yhtälön 2-22b vasemmasta puolesta otetaan divergenssi ja verrataan sitä edellä esitettyyn yhtälöön

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \boldsymbol{H} \right) \equiv 0 \neq \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} , \tag{2-24}$$

voidaan todeta, kun vielä huomioidaan yhtälö 2-22c, että ajan mukaan muuttuvassa tilanteessa staattisen tilan yhtälö 2-22b muuttuu muotoon

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} , \tag{2-25}$$

eli ajan mukaan muuttuva sähkökenttä aiheuttaa muutoksen magneettikentässä, vaikka tarkasteltavassa alueessa ei esiintyisi lainkaan virtaa.

Eli Maxvellin yhtälöt dynaamisessa tilanteessa ovat

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} , \tag{2-26a}$$

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} , \tag{2-26b}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho \text{ ja} \tag{2-26c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 . \tag{2-26d}$$

2.3.1. Maxwellin yhtälöiden integraalimuodot

Edellä yhtälöissä 2-26 a, b, c ja d esitettyjä differentiaaliyhtälöitä voidaan käyttää kaikissa tarkasteluavaruuden pisteissä. Tarkasteltaessa sähkömagneettisia ilmiöitä fyysisissä ympäristöissä, on tutkittavat kohteet tietyn muotoisia ja niillä on tietyt rajapinnat. Tämän vuoksi on usein käyttökelpoisempaa käyttää Maxwellin yhtälöiden integraalimuotoja. Ottamalla yhtälöiden 2-26a ja 2-26b molemmilta puolilta pinta-integraali ja soveltamalla Stokesin lausetta, saadaan ko. yhtälöt muotoon

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \text{ ja} \tag{2-27a}$$

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \,. \tag{2-27b}$$

Ottamalla tilavuusintegraalit yhtälöiden 2-26c ja 2-26d molemmilta puolilta ja käyttämällä divergenssiteoreemaa, yhtälöt saavat muodot

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V \text{ ja} \tag{2-27c}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \,. \tag{2-27d}$$

Taulukossa 1 on yhteenveto Maxwellin yhtälöistä niiden differentiaali- ja integraalimuodoissaan. Esityksessä on huomioitu, että pintaintegraali virrantiheydestä $\boldsymbol{J}$ vastaa virtaa I ja että tilavuusintegraali tilavuusvaraustiheydestä ρ vastaa kokonaisvarausta Q.

Taulukko 1. Yhteenveto Maxwellin yhtälöistä.

Differentiaalimuoto	Integraalimuoto	Nimitys
$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$	Faradayn laki
$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	Ampèren laki
$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho$	$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$	Gaussin laki
$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$	$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$	Magn.kenttä lähteetön

2.4. Sähkömagneetiikan rajapintaehdot

Sähkömagnetiikan rajapintaehdot voidaan johtaa Maxwellin yhtälöiden integraalimuodoista, joiden oletetaan olevan päteviä alueella, jossa väliaine muuttuu.

Soveltamalla roottoriyhtälöiden integraalimuotoja ohuella suljetulla reitillä väliaineiden rajapinnassa, saadaan johdettua sähkökentän- ja magneettikentän voimakkuuksien tangentiaalisten komponenttien väliset yhteydet rajapinnan eri puolella olevissa väliaineissa:

$$\boldsymbol{E}_{t1} = \boldsymbol{E}_{t2} \ \left[\mathrm{V/m}\right] \text{ ja} \tag{2-28}$$

$$\boldsymbol{e}_{n2} \times \left(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2\right) = \boldsymbol{J}_S \ \left[\mathrm{A/m}\right]. \tag{2-29}$$

Soveltamalla divergenssiyhtälöiden integraalimuotoja väliaineiden rajapinnassa olevaan ohueen sylinteriputkeen, saadaan johdettua sähkö- ja magneettivoidentiheyksien normaalin suuntaisten komponenttien väliset yhteydet rajapinnan eri puolella olevissa väliaineissa:

$$\boldsymbol{e}_{n2} \cdot \left(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2\right) = \rho_S \ \left[\mathrm{C/m^2}\right] \text{ ja} \tag{2-30}$$

$$\boldsymbol{B}_{n1} = \boldsymbol{B}_{n2} \ \left[\mathrm{T}\right]. \tag{2-31}$$

Edellä yhtälön muodossa esitetyt sähkömagneettisten kenttien rajapintaehdot voidaan esittää sanallisesti seuraavasti:

1. Sähkökentän voimakkuuden tangentiaalinen komponentti on jatkuva väliaineiden rajapinnassa.
2. Magneettikentän voimakkuuden tangentiaalinen komponentti on epäjatkuva rajapinnassa, jossa esiintyy pintavirtoja.
3. Sähkövuontiheyden normaali komponentti on epäjatkuva rajapinnassa, jossa esiintyy pintavarauksia.
4. Magneettivuontiheyden normaalikomponentti on jatkuva väliaineiden rajapinnassa.

2.4.1. Kahden häviöttömän lineaarisen väliaineen rajapinta

Häviötön (σ = 0) lineaarinen väliaine voidaan määritellä permittiivisyyden ε ja permeabiliteetin μ kautta. Kahden häviöttömän väliaineen rajapinnassa ei ole yleensä vapaita varauksia tai pintavirtoja. Tällöin voidaan asettaa varaustiheys ρ_S = 0 ja pintavirran tiheys $\boldsymbol{J}_S = 0$. Tällöin rajapintaehdot voidaan esittää taulukossa 2 olevien yhtälöiden avulla.

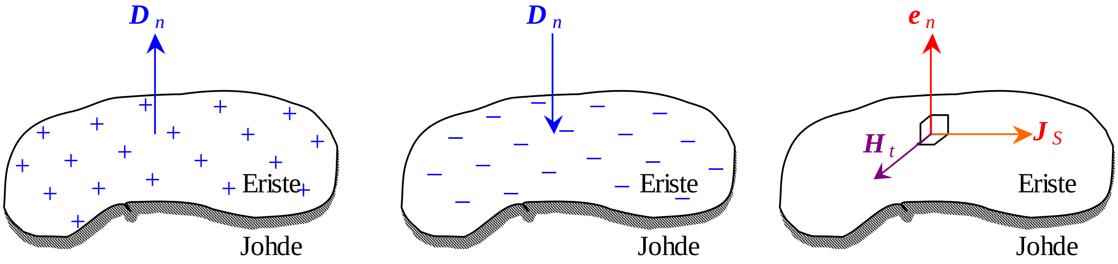
Taulukko 2. Rajapintaehdot kahden häviöttömän lineaarisen väliaineen rajapinnassa.

$\boldsymbol{E}_{t1} = \boldsymbol{E}_{t2} \rightarrow \frac{\boldsymbol{D}_{t1}}{\boldsymbol{D}_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	(2-32)
$\boldsymbol{H}_{t1} = \boldsymbol{H}_{t2} \rightarrow \frac{\boldsymbol{B}_{t1}}{\boldsymbol{B}_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$	(2-33)
$\boldsymbol{D}_{n1} = \boldsymbol{D}_{n2} \rightarrow \varepsilon_1 \boldsymbol{E}_{n1} = \varepsilon_2 \boldsymbol{E}_{n2}$	(2-34)
$\boldsymbol{B}_{n1} = \boldsymbol{B}_{n2} \rightarrow \mu_1 \boldsymbol{H}_{n1} = \mu_2 \boldsymbol{H}_{n2}$	(2-35)

2.4.2. Eristeen ja täydellisen johteen välinen rajapinta

Täydellisellä johteella oletetaan olevan äärettömän suuri johtavuus. Käytännössä on olemassa ”hyviä johteita” kuten hopea, kulta ja alumiini, joiden johtavuus on suuruusluokaltaan 10^7 S/m. Rajapintaehtojen kannalta hyviä johteita usein käsitellään täydellisinä johteina.

Maxwellin yhtälöistä todettavan sähkö- ja magneettikenttien välisen yhteyden perusteella voidaan todeta, että koska sähkökenttä ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$) johteen sisällä on nolla, myös magneettikenttä ($\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$) on johteen sisällä nolla. Eristeen puolella sähkökentän voimakkuuden tangentiaalinen komponentti ja magneettivuon tiheyden normaalikomponentti ovat nollia. Sähkövuon tiheyden normaalikomponentin suuruus on rajapinnassa olevan tasovarauksen suuruinen ja suunta määräytyy rajapinnassa olevien varausten etumerkistä (Kuva 4) ja magneettikentän tangentiaalinen komponentti on suuruudeltaan rajapinnalla olevan pintavirran suuruinen ja suunta määräytyy pintavirran suunnan ja pinnalle olevan normaalin ristitulon perusteella.



Kuva 4. Täydellisen johteen ja eristeen rajapinta.

Alla olevassa taulukossa 3 on esitetty yhteenveto täydellisen johteen ja eristeaineen välisistä rajapintaehdoista.

Taulukko 3. Rajapintaehdot täydellisen johteen ja eristeaineen välillä.

Johteen puolella	Eristeaineen puolella	
$\boldsymbol{E}_{t1} = 0$	$\boldsymbol{E}_{t2} = 0$	(2-36)
$\boldsymbol{H}_{t1} = 0$	$\boldsymbol{e}_{n1} \times \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{J}_S$	(2-37)
$\boldsymbol{D}_{n1} = 0$	$\boldsymbol{e}_{n1} \cdot \boldsymbol{D}_2 = \rho_S$	(2-38)
$\boldsymbol{B}_{n1} = 0$	$\boldsymbol{B}_{n2} = 0$	(2-39)

2.5. Aaltoyhtälöt lähteettömässä alueessa

Lähteettömässä alueessa ($\rho = 0$ ja $\boldsymbol{J} = 0$), jossa on yksinkertainen (lineaarinen, isotrooppinen ja homogeeninen) ei-johtava ($\sigma = 0$) väliaine, jonka ominaisuuksia kuvataan permittiivisyyden ε ja permeabiliteetin μ avulla, Maxwellin yhtälöt voidaan esittää

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{2-40a}$$

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{2-40b}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \text{ ja} \tag{2-40c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = 0. \tag{2-40d}$$

Yhtälöt 2–40 ovat kahden muuttujan (sähkökentänvoimakkuus $\boldsymbol{E}$ ja magneettikentänvoimakkuus $\boldsymbol{H}$) ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöitä, jotka voidaan yhdistää joko sähkökentänvoimakkuuden $\boldsymbol{E}$ tai magneettikentänvoimakkuuden $\boldsymbol{H}$ toisen asteen yhtälöksi:

Otetaan roottori yhtälön 2-40a molemmilta puolilta

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\boldsymbol{H}\right)$$

ja sijoitetaan yhtälössä 2-40b esitetty magneettikentän roottorin ja sähkökentän muutoksen välinen yhteystieto edellisen yhtälön oikealle puolelle

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\,.$$

Vektorimatematiikassa on todistettu että

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}\right) - \vec{\nabla}^2\boldsymbol{E}\,.$$

Ottamalla huomioon, että kysymyksessä on lähteetön alue eli yhtälö 2-40c, edellinen yhtälö saadaan muotoon

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\vec{\nabla}^2\boldsymbol{E}$$

ja käsiteltävä yhtälö saa muodon

$$\vec{\nabla}^2\boldsymbol{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2\text{-}41)$$

tai, kun otetaan huomioon, että $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ muodon

$$\vec{\nabla}^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0\,. \qquad (2\text{-}42)$$

Vastaavasti voidaan johtaa magneettikentänvoimakkuudelle $\boldsymbol{H}$ yhtälö

$$\vec{\nabla}^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 . \tag{2-43}$$

2.6. Aikaharmoniset kentät

Edellisissä kappaleissa johdetut Maxwellin yhtälöt pätevät kaikissa aikariippuvuustilanteissa. Sähkötekniikassa esiintyvät yleisimmät aikariippuvuudet ovat sinimuotoisia. Seuraavassa tarkastellaan lähemmin jatkuvan tilan sinimuotoisesti ajan mukaan vaihtelevia aikaharmonisia kenttiä.

2.6.1. Jatkuvan tilan sinimuotoinen vaihtosähkö piirianalyysissä

Sinimuotoinen suure esitetään kolmen eri muuttujan avulla: amplitudi (eli suuruus tai huippuarvo), taajuus ja vaihekulma. Esimerkiksi yhtälössä

$$i(t) = \hat{\imath}\cos(\omega t + \varphi) \tag{2-44}$$

$\hat{\imath}$ kuvaa virran huippuarvoa, ω kulmataajuutta (rad/s) ja φ vaihekulmaa. Kulmataajuuden ω ja taajuuden f välillä on yhteys $\omega = 2\pi f$ ja cos- ja sin-funktioiden välillä yhteys

$$i(t) = \hat{\imath}\cos(\omega t + \varphi) = \hat{\imath}\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Cos- ja sin-funktioiden integroiminen ja derivoiminen on suhteellisen työlästä. Esimerkiksi, jos halutaan ratkaista sinimuotoisesti ajan mukaan muuttuvaan jännitelähteeseen $e(t) = \hat{e}\cos\omega t$ kytketyssä RLC-sarjakytkentäpiirissä kulkeva virta, saadaan ratkaistavaksi yhtälö

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t = e(t) . \tag{2-45}$$

Kun yhtälöön sijoitetaan virran $i(t)$ yhtälö 2-44, se saa muodon

$$\hat{\imath}\left(-\omega L\sin(\omega t + \varphi) + R\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi)\right) = \hat{e}\cos\omega t , \tag{2-46}$$

jota on suhteellisen hankala ratkaista matemaattisesti.

Ko. tilannetta on huomattavasti helpompi käsitellä matemaattisesti, kun esimerkkitilanteessa siirrytään käyttämään eksponentiaalimuotoa jännittestä

$$e(t) = \hat{e}\cos\omega t = \mathrm{Re}\left\{\left(\hat{e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{e}_s\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \tag{2-47}$$

ja virrasta

$$i(t) = \hat{\imath}\cos\left(\omega t + \varphi\right) = \mathrm{Re}\left\{\left(\hat{\imath}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{\imath}_s\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}, \tag{2-48}$$

missä $\mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$ tarkoittaa kompleksiluvun

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t$$

reaaliosaa.

Edellisissä yhtälöissä 2-47 ja 2-48

$$\hat{e}_s = \hat{e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = \hat{e} \text{ ja} \tag{2-49a}$$

$$\hat{\imath}_s = \hat{\imath}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{2-49b}$$

ovat (skalaari-) osoittimia, jotka sisältävät tiedon suuruudesta ja vaihekulmasta, mutta ovat riippumattomia ajasta.

Nyt

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{d}\left(\hat{\imath}_s\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)}{\mathrm{d}t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{j}\omega\hat{\imath}_s\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \text{ ja} \tag{2-50}$$

$$\int i\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left\{\int\hat{\imath}_s\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\hat{\imath}_s}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}. \tag{2-51}$$

Sijoittamalla yhtälöissä 2-47 … 2-51 esitetyt tiedot yhtälöön 2-45 saadaan ratkaistava yhtälö muotoon

$$\left[R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\hat{\imath}_s = \hat{e}_s\,, \tag{2-52}$$

josta virran osoitin $\hat{\imath}_s$ voidaan helposti ratkaista. Tämän jälkeen palaaminen takaisin aikatasoon (= $i(t)$) tapahtuu yksinkertaisesti kertomalla ratkaistu $\hat{\imath}_s$ $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$:llä ja ottamalla saadusta kompleksiluvusta reaaliosa.

Jos jännite on annettu muodossa $e(t) = \hat{e}\sin\omega t$, ratkaisu etenee muuten samoin, mutta siirryttäessä aikatasosta taajuustasoon otetaan imaginaariosa kompleksiluvusta $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.

2.6.2. Aikaharmoniset sähkömagneettiset kentät

Kenttävektorit, joiden suuruus riippuu paikkakoordinaatista ja jotka ovat sinimuotoisesti ajasta riippuvaisia, voidaan esittää vektoriosoittimina, joiden suuruus on paikasta riippuvainen, mutta ei ajasta. Esimerkiksi cos-funktiota noudattava aikaharmoninen sähkökenttä E voidaan kirjoittaa muodossa

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}, \tag{2-53}$$

missä $\boldsymbol{E}(x,y,z)$ on vektoriosoitin, joka sisältää tiedon suunnasta, suuruudesta ja vaihekulmasta. Yhtälöjen 2-53, 2-48, 2-50 ja 2-51 perusteella voidaan todeta, että

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}(x,y,z,t)}{\partial t} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]\right\} = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{j}\omega\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}\text{ja}$$

$$\int \boldsymbol{E}(x,y,z,t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left\{\int\left[\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]\mathrm{d}t\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\boldsymbol{E}(x,y,z)}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}.$$

Näin ollen aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt voidaan esittää yksinkertaiselle (lineaariselle, isotrooppiselle ja homogeeniselle) väliaineelle kenttävektoriosoittimien ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$) ja lähdeosoittimien (ρ, $\boldsymbol{J}$) avulla

$$\vec{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}\,, \tag{2-54a}$$

$$\vec{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\,, \tag{2-54b}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \text{ ja} \tag{2-54c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = 0 . \tag{2-54d}$$

2.6.3. Lähteetön kenttä yksinkertaisessa väliaineessa

Aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt saavat lähteettömässä (ρ = 0 ja $\boldsymbol{J}$ = 0) ei-johtavassa (σ = 0) väliaineessa muodot

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} , \tag{2-55a}$$

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} , \tag{2-55b}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \text{ ja} \tag{2-55c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = 0 , \tag{2-55d}$$

Ko. yhtälöiden yhdistäminen johtaa homogeenisiin $\boldsymbol{E}$:n ja $\boldsymbol{H}$:n vektoriaaltoyhtälöihin

$$\vec{\nabla}^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ ja} \tag{2-56}$$

$$\vec{\nabla}^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \text{, joissa} \tag{2-57}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \text{ on aallon etenemisnopeus väliaineessa.} \tag{2-58}$$

Yhtälöt 2-56 ja 2-57 voidaan esittää homogeenisina Helmholtzin vektoriyhtälöinä

$$\vec{\nabla}^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \text{ ja} \tag{2-59}$$

$$\vec{\nabla}^2 \boldsymbol{H} + k^2 \boldsymbol{H} = 0 \text{, joissa} \tag{2-60}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \text{ aaltoluku.} \tag{2-61}$$