

Tehtävä 1.

Määritä taajuus, millä johtavuusvirran tiheys ja siirrosvirran tiheys ovat yhtäsuuret

a) tislatussa vedessä, missä $\sigma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ S/m}$ ja $\epsilon_r = 81$;

b) merivedessä, missä $\sigma = 6,0 \text{ S/m}$ and $\epsilon_r = 1$.

Johtavuusvirrantiheys / siirrosvirrantiheys:

$$\frac{J_c}{J_D} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} = 1 \Rightarrow \omega = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad ; \quad \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\sigma}{2\pi \epsilon}$$

a) Joten tislatussa vedessä

$$f = \frac{2,0 \cdot 10^{-4} \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 81 \cdot 10^{-9}} = \frac{36}{81 \cdot 10^{-5}} = 44, \bar{4} \cdot 10^3 = \underline{\underline{44, \bar{4} \text{ kHz}}}$$

b) ja merivedessä:

$$f = \frac{6,0 \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-9}} = \frac{3 \cdot 36}{10^{-9}} = 108,0 \cdot 10^9 = \underline{\underline{108,0 \text{ GHz}}}$$

Tehtävä 2.

Levykondensaattorin johdelevyjen välinen etäisyys on 0,6 mm ja levyjen välissä olevan eristeen $\epsilon_r = 15,3$. Ko. kondensaattori on kytketty jännitteeseen, jonka tehollisarvo on 25 V ja taajuus 15 MHz. Määritä siirrosvirran tiheyden tehollisarvo. (Hajavuota ei huomioida).

Siirrosvirta levykondensaattorin levyjen välissä:

$$i_D = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial D \mathbf{e}_z}{\partial t} \cdot dS \mathbf{e}_z$$

Sähkövuontiheys levykondensaattorin levyjen välissä:

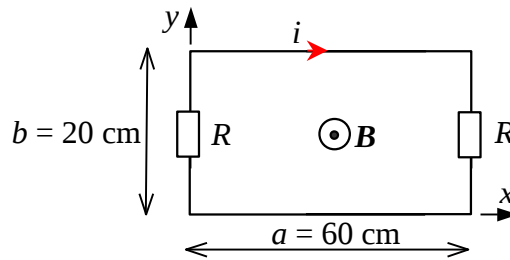
$$D = \epsilon E = \epsilon \frac{u}{d} \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\epsilon}{d} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Joten:

$$\begin{aligned} i_D &= \int_S \frac{\epsilon}{d} \frac{\partial u}{\partial t} dS = \frac{\epsilon}{d} \frac{\partial u}{\partial t} \int_S dS = \frac{\epsilon}{d} \frac{\partial (\sqrt{2} U \sin(2\pi f t))}{\partial t} \int_S dS \\ &\Rightarrow i_D = \frac{\epsilon}{d} 2\pi f \sqrt{2} U \cos(2\pi f t) \int_S dS \\ &\Rightarrow I_D = \frac{\epsilon}{d} 2\pi f U \int_S dS \\ &\Rightarrow I_D = \frac{15,3 \cdot 10^{-9}}{36\pi \cdot 0,6 \cdot 10^{-3}} \cdot 2\pi \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 25 \int_S dS = 531,25 \int_S dS \\ &\Rightarrow \underline{\underline{\frac{I_D}{S} = 531,25 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}}} \end{aligned}$$

Tehtävä 3.

Alla olevan kuvan mukainen piiri on sinimuotoisesti värähtelevässä ja epähomogeenisessa magneettikentässä $\mathbf{B} = B_0 \cos(\omega t - px) \mathbf{e}_z$, missä vakiot ovat $\omega = 2\pi f$ ja taajuus $f = 2 \text{ MHz}$, $p = \frac{2\pi}{10 \text{ m}}$ sekä $B_0 = 3 \text{ } \mu\text{T}$. Jos piirissä olevat vastukset ovat suuruudeltaan $R = 20 \text{ } \Omega$ kumpikin, määrää piirissä kulkeva virtafunktio. Millä hetkellä virta on nolla, millä hetkellä maksimissaan?



Kuva 1. Piirikaavio tehtävään 3.

Trig.kaavoja:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(0,5 \cdot (x + y)\right) \cdot \cos\left(0,5 \cdot (x - y)\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos\left(0,5 \cdot (x + y)\right) \cdot \sin\left(0,5 \cdot (x - y)\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(0,5 \cdot (x + y)\right) \cdot \cos\left(0,5 \cdot (x - y)\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(0,5 \cdot (x + y)\right) \cdot \sin\left(0,5 \cdot (x - y)\right)$$

Johdinsilmukan läpi kulkeva kokonaismagneettivuo:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^a B_0 \cos(\omega t - px) \mathbf{e}_z \cdot b \mathbf{e}_z dx = B_0 b \int_0^a \cos(\omega t - px) dx \\ \Rightarrow \Phi &= B_0 b \left[-\frac{1}{p} \right]_0^a \sin(\omega t - px) = \frac{-B_0 b}{p} (\sin(\omega t - pa) - \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

Johdinsilmukkaan induoituva jännite:

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{-B_0 b}{p} \frac{d(\sin(\omega t - pa) - \sin(\omega t))}{dt} = \frac{B_0 b \omega}{p} (\cos(\omega t - pa) - \cos(\omega t))$$

Joten johtimessa kulkeva virta:

$$\begin{aligned} i &= \frac{u}{2R} = \frac{B_0 b \omega}{2Rp} (\cos(\omega t - pa) - \cos(\omega t)) \\ \Rightarrow i &= \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 10}{2 \cdot 20 \cdot 2\pi} \left(\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{10} \cdot 0,6\right) - \cos(\omega t) \right) \\ \Rightarrow i &= 0,3 \cdot (\cos(\omega t - 0,12\pi) - \cos(\omega t)) \text{ A} \end{aligned}$$

Virran ensimmäinen nollakohta:

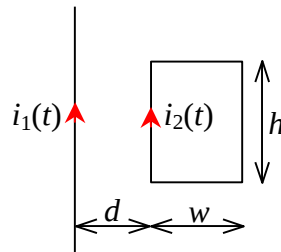
$$\begin{aligned}(\cos(\omega t - 0,12\pi) - \cos(\omega t)) &= 0 \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin(0,5 \cdot (x + y)) \cdot \sin(0,5 \cdot (x - y)) \\ \Rightarrow -2 \sin(0,5 \cdot (\omega t - 0,12\pi + \omega t)) \cdot \sin(0,5 \cdot (\omega t - 0,12\pi - \omega t)) &= 0 \\ \Rightarrow \sin(0,5 \cdot (2\omega t - 0,12\pi)) \cdot \sin(0,5 \cdot (-0,12\pi)) &= 0 \\ \Rightarrow (0,5 \cdot (2\omega t - 0,12\pi)) &= 0 \\ \Rightarrow \omega t - 0,06\pi &= 0 \\ \Rightarrow t = \frac{0,06\pi}{\omega} = \frac{0,06\pi}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^6} = 0,015 \cdot 10^{-6} &= 15 \text{ ns}\end{aligned}$$

Virran ensimmäinen maksimi:

$$\begin{aligned}T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2 \cdot 10^6} &= 0,5 \cdot 10^{-6} = 500 \text{ ns} \\ \Rightarrow t = 15 \text{ ns} + \frac{T}{4} = 15 \text{ ns} + \frac{500 \text{ ns}}{4} &= 140 \text{ ns}\end{aligned}$$

Tehtävä 4.

Alla olevassa kuvassa esitettyssä pitkässä virtalangassa kulkee virta $i_1(t)$ ja sen vieressä on kuvan mukainen suorakulmainen silmukka.



Kuva 2. Periaatekuva tehtävään 4.

- Määrää silmukan kautta kulkeva magneettivuo Φ ja sen avulla langan ja silmukan välinen keskinäisinduktanssi L_{12} .
- Jos virta $i_1(t)$ on ajan mukana muuttuva virta, määrää silmukkaan indusoitunut sähkömotorinen voima.
- Jos silmukan resistanssi on R ja induktanssi L , määrää silmukkaan syntyvän virran $i_2(t)$ differentiaaliyhtälö. Käytä piiriteorian kaavaa $u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$, missä U on vastuksen ja induktanssin yli oleva jännite ja $i(t)$ vastaava virta.
- Jos virtafunktio $i_1(t)$ on askelfunktio: $i_1(t) = 0$, kun $t < 0$, ja $i_1(t) = I_1$ (vakio), kun $t > 0$, määrää virran $i_2(t)$ differentiaaliyhtälön ratkaisu.
- Hahmottele ratkaisufunktio $i_2(t)$, kun $\frac{L}{R}$ on suuri ja pieni sekä kun $\frac{L_{12}}{L}$ on suuri ja pieni.
- Jos askelfunktion sijaan kyseessä on pulssi $i_1(t) = 0$, kun $t < 0$ ja $t > T$, ja $i_1(t) = I_1$ (vakio), kun $0 < t < T$, määrää virran $i_2(t)$ differentiaaliyhtälön ratkaisu, kun $T \gg \frac{L}{R}$.

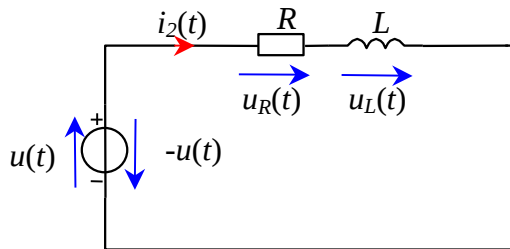
a) Langan silmukkaan aiheuttama magneettivuo $\rightarrow$ keskinäisinduktanssi:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_d^{d+w} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi \cdot h d\mathbf{r} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 i_1 h}{2\pi} \int_d^{d+w} \frac{1}{r} \cdot dr = \frac{\mu_0 i_1 h}{2\pi} \ln r = \frac{\mu_0 i_1 h}{2\pi} \ln \frac{d+w}{d}$$

$$L_{12} = \frac{\Phi}{i_1} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{d+w}{d} \text{ [H]}$$

b) Silmukkaan indusoituva sähkömotorinen voima (virran ollessa vaihtovirtaa):

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_{12} \frac{di_1}{dt} \text{ [V]}$$



Kuva 3. Silmukan toimintaa kuvaava piirikaavio tehtävässä 4.

c) Silmukkaan syntyvän virran $i_2(t)$ differentiaaliyhtälö:

$$u = -L_{12} \frac{di_1}{dt}$$

$$\Rightarrow L_{12} \frac{di_1}{dt} = L \frac{di_2}{dt} + Ri_2$$

d) Jos virtafunktio $i_1(t)$ on askelfunktio, virran $i_2(t)$ differentiaaliyhtälön ratkaisu:

$$sL_{12} \frac{I_1}{s} = sLI_2(s) + RI_2(s)$$

$$\Rightarrow I_2(s) = \frac{L_{12}I_1}{sL + R} = \frac{L_{12}}{L} \frac{I_1}{s + R/L}$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{L_{12}}{L} I_1 e^{-R/L t} \text{ [A]}, t > 0$$

e) Jos $\frac{L}{R}$ on suuri, niin virta $i_2(t)$ on loiva ja hitaasti vaimeneva. Jos $\frac{L_{12}}{L}$ on suuri, niin virran $i_2(t)$ huippu on korkea.

f) Jos kyseessä on pulssi, virran $i_2(t)$ differentiaaliyhtälön ratkaisu:

$$i_1(t) = I_1 \varepsilon(t) - I_1 \varepsilon(t - T)$$

$$\Rightarrow I_2(s) = \frac{L_{12}}{L} \frac{I_1(1 - e^{-sT})}{s + R/L}$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{L_{12}}{L} I_1 e^{-R/L t} \varepsilon(t) - \frac{L_{12}}{L} I_1 e^{-R/L(t-T)} \varepsilon(t - T) \text{ [A]}$$