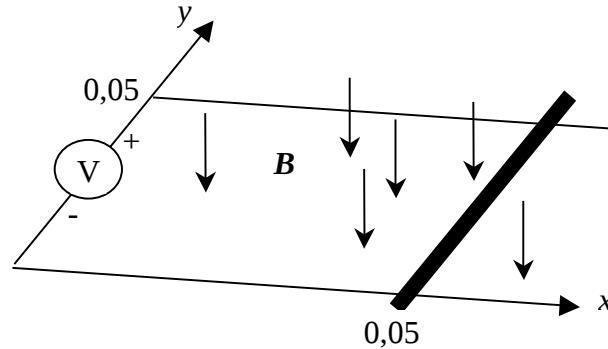


Tehtävä 1.

Alla esitetyn kuvan mukaisesti y -akselin suuntainen sauvajohdin yhdistää x -akselin suuntaiset johteet ($y = 0$ ja $y = 0,05$ m).

a) Määritä induisoitunut jännite, kun sauva on kohdassa $x = 0,05$ m ja $\mathbf{B} = 0,30 \cos 10^4 t (-\mathbf{e}_z)$ (T).

b) Määritä induisoitunut jännite, kun sauva liikkuu nopeudella $\mathbf{v} = 150(\mathbf{e}_x)$ (m/s).



Kuva 1. Kuva tehtävään 1.

a) Indusoitunut jännite, kun sauva ei liiku:

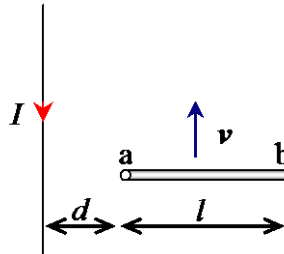
$$\begin{aligned}
 u_1 &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial}{\partial t} B(-\mathbf{e}_z) \cdot d\mathbf{S} \mathbf{e}_z \\
 \Rightarrow u_1 &= \int_0^{0,05} \int_0^{0,05} \frac{\partial}{\partial t} 0,30 \cdot \cos(10^4 t) dx dy = -0,30 \int_0^{0,05} \int_0^{0,05} 10^4 \cdot \sin(10^4 t) dx dy \\
 \Rightarrow \underline{\underline{u_1}} &= -0,30 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(10^4 t) = \underline{\underline{7,5 \sin(10^4 t + 180^\circ) \text{ V}}}
 \end{aligned}$$

b) Indusoitunut jännite, kun sauva liikkuu:

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial}{\partial t} B(-\mathbf{e}_z) \cdot d\mathbf{S} \mathbf{e}_z + \int (\mathbf{v}(\mathbf{e}_x) \times B(-\mathbf{e}_z)) \cdot d\mathbf{y} \mathbf{e}_y \\
 \Rightarrow u &= \int_S \frac{\partial}{\partial t} B dS + \int v B (\mathbf{e}_y) \cdot d\mathbf{y} \mathbf{e}_y = \int_S \frac{\partial}{\partial t} B dS + \int v B dy \\
 \Rightarrow u &= \int_0^{0,05} \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} 0,30 \cdot \cos(10^4 t) dx dy + \int_0^{0,05} 150 \cdot 0,30 \cdot \cos(10^4 t) dy \\
 \Rightarrow u &= -0,30 \int_0^{0,05} \int_0^x 10^4 \cdot \sin(10^4 t) dx dy + 2,25 \cos(10^4 t) \text{ V} \\
 \Rightarrow \underline{\underline{u}} &= \underline{\underline{(150x \sin(10^4 t + 180^\circ) + 2,25 \cos(10^4 t)) \text{ V}}}
 \end{aligned}$$

Tehtävä 2.

Alla olevassa kuvassa esitettyssä pitkässä virtalangassa kulkee virta $I = 10$ A ja sen vieressä on etäisyydellä $d = 10$ cm kuvan mukainen metallilanka ($l = 20$ cm), joka liikkuu nopeudella $v = 5$ m/s. Määrä ko. lyhyen johtimen päiden välille indusoitunut jännite u_{ab} .



Kuva 2. Kuva tehtävään 2.

Pitkän langan aiheuttama magneettikentän voimakkuus ja vuontiheys:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi$$

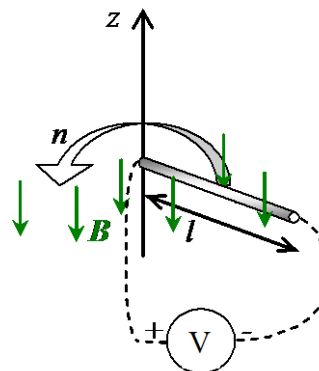
Ko. magneettivuo aiheuttaa pitkän langan vierellä liikkuvaan metallilankaan smv:n:

$$u_{ab} = \int_b^a (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a (v \mathbf{e}_z \times B(-\mathbf{e}_\varphi)) \cdot d\rho(\mathbf{e}_\rho) = \int_b^a v \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho = \frac{v\mu_0 I}{2\pi} \int_b^a \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{v\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho = -\frac{v\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow u_{ab} = \frac{5 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2\pi} \ln \frac{10}{30} = \frac{5 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2\pi} \ln \frac{10}{30} = -10,99 \cdot 10^{-6} = -11 \mu\text{V}$$

Tehtävä 3.

Alla olevan kuvan mukaisesti sauvaa ($l = 10$ cm) pyöritetään toisen päänsä ympäri homogeenisen magneettikentän ($\mathbf{B} = 0,01(-\mathbf{e}_z)$ T) normaalitasossa pyörimisnopeudella $n = 3000$ kierrosta minuutissa. Kuinka suuri lähdejännite indusoituu sauvaan eli mitä jännitemittari ”näyttää”?



Kuva 3. Kuva tehtävään 3.

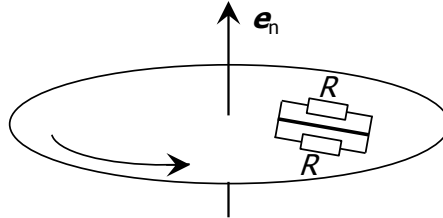
$$u_l = \int_0^l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l (v \mathbf{e}_\varphi \times B(-\mathbf{e}_z)) \cdot d\rho(\mathbf{e}_\rho) = -\int_0^l 2\pi n \rho B d\rho = -2\pi n B \int_0^l \rho d\rho = -2\pi n B \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^l = -\pi n B l^2$$

$$\Rightarrow u_l = -\pi \cdot \frac{3000}{60} \cdot 0,01 \cdot (10 \cdot 10^{-2})^2 = -15,71 \cdot 10^{-3} = -16 \text{ mV}$$

Volttimittarin näytössä 16 mV.

Tehtävä 4.

Säteensuuntainen johdin ($3 \leq \rho \leq 8$ cm) on upotettu lasista valmistettuun pyörivään levyyn (ks. alla oleva kuva). Johtimen päiden välille on kytketty kaksi $12 \text{ m}\Omega$ vastusta. Lasilevy pyörii 12 kierrosta/min. Määritä järjestelmään muodostuva sähköteho, kun levy on kentässä $\mathbf{B} = 0,30\mathbf{e}_n \text{ T}$. Mikä vaikutus ko. energialla on pyörimisliikkeeseen? Kuinka Lenz'n lain sovellus näkyy tässä ongelmassa.



Kuva 4. Kuva tehtävään 4.

Johtimeen indusoituva jännite:

$$u = \int_{r_1}^{r_2} (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_2} (\omega \rho \mathbf{e}_\phi \times B \mathbf{e}_z) \cdot d\rho \mathbf{e}_\rho$$

$$\Rightarrow u = \int_{0,03}^{0,08} \left(\frac{12 \cdot 2\pi}{60} \rho \cdot 0,30 \mathbf{e}_\rho \right) \cdot d\rho \mathbf{e}_\rho = 0,12\pi \int_{0,03}^{0,08} \rho d\rho = 0,12\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (0,08^2 - 0,03^2) = 1037 \text{ } \mu\text{V}$$

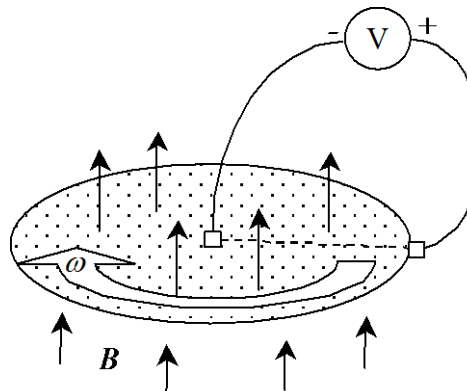
Järjestelmään muodostuva sähköteho:

$$P = \frac{u^2}{R}$$

$$\Rightarrow P = \frac{(1037 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 2}{12 \cdot 10^{-3}} = 179 \text{ } \mu\text{W}$$

Tehtävä 5.

Alla olevassa kuvassa esitettyyn Faradayn levygeneraattoriin on kytketty volttimittari kohtiin $r_1 = 2 \text{ mm}$ ja $r_2 = 100 \text{ mm}$. Levy pyörii 600 kierrosta/min kentässä, jonka tiheys on $0,80 \text{ T}$? Mikä on jännitemittarin lukema?



Kuva 5. Kuva tehtävään 5.

SATE.10xx Staattisen kenttäteorian laajentaminen Sähkömagneettiseksi kenttäteoriaksi syksy 2012

4 / 4

Laskuharjoitus 2: Faradayn laki ja indusoitunut sähkömotorinen voima

Levyyn indusoituva jännite:

$$u = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint (U \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int (U(-\mathbf{e}_\varphi) \times B\mathbf{e}_z) \cdot d\rho \mathbf{e}_\rho$$

Ja volttimittarin näyttämä:

$$u = -\int_{r_s}^{r_u} \omega \rho B d\rho = -\int_{0,002}^{0,100} \frac{600}{60} \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot 0,80 d\rho = -16\pi \left[\frac{0,100}{0,002} \frac{1}{2} \rho^2 \right]$$
$$\Rightarrow \underline{u} = -8\pi(0,100^2 - 0,002^2) = \underline{\underline{-0,251 \text{ V}}}$$