

Tehtävä 1.

Alue 1 ($\mu_{r1} = 5$) on tason $3x + 6y + 4z = 12$ origon puolella. Alueella 2 $\mu_{r2} = 2$.

Olkoon $\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\mu_0} (3,0\mathbf{e}_x - 0,5\mathbf{e}_z)$ (A/m). Määritä $\mathbf{B}_2$ ja θ_2 .

Tason $3x + 6y + 4z = 12$ normaalivektorit:

$$\mathbf{e}_n = \pm \frac{3\mathbf{e}_x + 6\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}} = \pm \frac{3\mathbf{e}_x + 6\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z}{\sqrt{61}}$$

Origon puolella: $\mathbf{e}_n = -\frac{3\mathbf{e}_x + 6\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z}{\sqrt{61}}$

Magneettivuontiheyden normaalikomponentti ko. tasolle:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \mu_1 \mathbf{H}_1 = 5(3,0\mathbf{e}_x - 0,5\mathbf{e}_z) = 15,0\mathbf{e}_x - 2,5\mathbf{e}_z \\ \Rightarrow \mathbf{B}_{n1} &= (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_n = \left[(15,0\mathbf{e}_x - 2,5\mathbf{e}_z) \cdot \left(-\frac{3\mathbf{e}_x + 6\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z}{\sqrt{61}} \right) \right] \left(-\frac{3\mathbf{e}_x + 6\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z}{\sqrt{61}} \right) \\ \Rightarrow \mathbf{B}_{n1} &= -\frac{45 - 10}{\sqrt{61}} \left(-\frac{3\mathbf{e}_x + 6\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z}{\sqrt{61}} \right) = \frac{105\mathbf{e}_x + 210\mathbf{e}_y + 140\mathbf{e}_z}{61} = 1,721\mathbf{e}_x + 3,443\mathbf{e}_y + 2,295\mathbf{e}_z = \mathbf{B}_{n2} \end{aligned}$$

Magneettivuontiheyden tangentialiset komponentit:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{t1} &= \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_{n1} = (15,0\mathbf{e}_x - 2,5\mathbf{e}_z) - (1,721\mathbf{e}_x + 3,443\mathbf{e}_y + 2,295\mathbf{e}_z) = 13,279\mathbf{e}_x - 3,443\mathbf{e}_y - 4,795\mathbf{e}_z \\ \Rightarrow \mathbf{H}_{t1} &= \frac{\mathbf{B}_{t1}}{\mu_1} = \frac{13,279\mathbf{e}_x - 3,443\mathbf{e}_y - 4,795\mathbf{e}_z}{5\mu_0} = \mathbf{H}_{t2} \\ \Rightarrow \mathbf{B}_{t2} &= \mu_2 \mathbf{H}_{t2} = \frac{2(13,279\mathbf{e}_x - 3,443\mathbf{e}_y - 4,795\mathbf{e}_z)}{5} = 5,3116\mathbf{e}_x - 1,3772\mathbf{e}_y - 1,918\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Magneettivuontiheys:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 &= \mathbf{B}_{n2} + \mathbf{B}_{t2} = (1,721\mathbf{e}_x + 3,443\mathbf{e}_y + 2,295\mathbf{e}_z) + (5,3116\mathbf{e}_x - 1,3772\mathbf{e}_y - 1,918\mathbf{e}_z) \\ \Rightarrow \mathbf{B}_2 &= 7,0326\mathbf{e}_x + 2,0658\mathbf{e}_y + 0,377\mathbf{e}_z = 7,34 \left(\frac{7,0326\mathbf{e}_x + 2,0658\mathbf{e}_y + 0,377\mathbf{e}_z}{7,34} \right) \text{ T} \end{aligned}$$

Aallon etenemiskulma θ_2 :

$$\begin{aligned} \tan \theta_2 &= \frac{B_{n2}}{B_{t2}} \\ (1,721\mathbf{e}_x + 3,443\mathbf{e}_y + 2,295\mathbf{e}_z) &+ (5,3116\mathbf{e}_x - 1,3772\mathbf{e}_y - 1,918\mathbf{e}_z) \\ \Rightarrow \theta_2 &= \tan^{-1} \frac{B_{n2}}{B_{t2}} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1,721)^2 + (3,443)^2 + (2,295)^2}}{\sqrt{(5,312)^2 + (-1,377)^2 + (-1,918)^2}} = \tan^{-1} \frac{4,481}{5,816} = \underline{\underline{37,6^\circ}} \end{aligned}$$

Tehtävä 2.

Kahden alueen rajapinta on kohtisuorassa karteesisen koordinaatiston yhteen akseliin nähden.

Jos $\mathbf{B}_1 = \mu_0(34,5\mathbf{e}_x + 24,0\mathbf{e}_z)$ T ja $\mathbf{B}_2 = \mu_0(22,0\mathbf{e}_x + 24,0\mathbf{e}_z)$ T, mikä on suhde $(\tan \theta_1)/(\tan \theta_2)$?

Magneettivuontiheyden normaalikomponentti on jatkuva ja magneettikentän voimakkuuden tangentialinen komponentti on jatkuva (jos rajapinnassa ei ole 'liikkuvia varauksia'):

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = \mu_0(34,5\mathbf{e}_x + 24,0\mathbf{e}_z) \\ \mathbf{B}_2 = \mu_0(22,0\mathbf{e}_x + 24,0\mathbf{e}_z) \end{cases}$$

$$\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} = B_{1z}\mathbf{e}_z = B_{2z}\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} \Rightarrow \frac{\mathbf{B}_{t1}}{\mu_1} = \frac{\mathbf{B}_{t2}}{\mu_2} \Rightarrow \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mathbf{B}_{t2}}{\mathbf{B}_{t1}} = \frac{B_{2x}\mathbf{e}_x}{B_{1x}\mathbf{e}_x}$$

Joten suhde $(\tan \theta_1)/(\tan \theta_2)$:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\frac{B_{n1}}{B_{t1}}}{\frac{B_{n2}}{B_{t2}}} = \frac{B_{t2}}{B_{t1}} = \frac{22,0}{34,5} = 0,64$$

Tehtävä 3.

Virtataso ($\mathbf{K} = \frac{8,0}{\mu_0}\mathbf{e}_z$ A/m tasolla $x = 0$) erottaa alueen 1 ($x < 0$ ja $\mu_{r1} = 1$) alueesta 2 ($x > 0$ ja

$\mu_{r2} = 3$). Olkoon $\mathbf{H}_1 = \frac{10,0}{\mu_0}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z)$ A/m. Määritä $\mathbf{H}_2$.

Virtatason aiheuttama muutos magneettikentänvoimakkuudessa:

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{e}_{n1} = \mathbf{K}$$

Virtatason vaikutus magneettikentän voimakkuuden tangentialiseen komponenttiin:

$$\begin{aligned} \left(\frac{10,0}{\mu_0}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z) - \mathbf{H}_2 \right) \times \mathbf{e}_x &= \frac{8,0}{\mu_0}\mathbf{e}_z \\ \Rightarrow \mathbf{H}_2 \times \mathbf{e}_x &= \frac{10,0}{\mu_0}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_x - \frac{8,0}{\mu_0}\mathbf{e}_z \\ \Rightarrow \mathbf{H}_2 \times \mathbf{e}_x &= \frac{10,0}{\mu_0}(-\mathbf{e}_z) + \frac{10,0}{\mu_0}(\mathbf{e}_y) - \frac{8,0}{\mu_0}\mathbf{e}_z = \frac{10,0}{\mu_0}(\mathbf{e}_y) + \frac{18,0}{\mu_0}(-\mathbf{e}_z) \\ \Rightarrow \mathbf{H}_{t2} &= \frac{10,0}{\mu_0}(-\mathbf{e}_z) + \frac{18,0}{\mu_0}\mathbf{e}_y = \frac{20,6}{\mu_0} \left(\frac{18,0\mathbf{e}_y - 10,0\mathbf{e}_z}{20,6} \right) \frac{\text{A}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Joten $\mathbf{H}_2$:

$$\mathbf{H}_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{H}_{n1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{10,0}{\mu_0} \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{n2} + \mathbf{H}_{t2} = \frac{3,3}{\mu_0} \mathbf{e}_x + \frac{10,0}{\mu_0} (-\mathbf{e}_z) + \frac{18,0}{\mu_0} \mathbf{e}_y = \frac{20,86}{\mu_0} \left(\frac{3,3\mathbf{e}_y + 18,0\mathbf{e}_y - 10,0\mathbf{e}_z}{20,86} \right) \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Tehtävä 4.

Pallokoordinaatistossa alue 1 on $r < a$, alue 2 on $a < r < b$ ja alue 3 on $r > b$. Alueet 1 ja 3 ovat vapaata tilaa (free space), ja $\mu_{r2} = 300$. Olkoon $\mathbf{B}_1 = 0,30\mathbf{e}_r$ (T). Määritä $\mathbf{H}$ kussakin alueessa.

Magneettivuontiheys on radiaalinen:

$$\mathbf{B}_1 = 0,30\mathbf{e}_r \text{ T}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} = \mathbf{B}_{n3} = \mathbf{B}_1 = 0,30\mathbf{e}_r \text{ T}$$

Magneettikentän voimakkuudet:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} = \frac{0,30}{\mu_0} \mathbf{e}_r \text{ A/m}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} = \frac{0,30\mathbf{e}_r}{300\mu_0} = \frac{1,0 \cdot 10^{-3}}{\mu_0} \mathbf{e}_r \text{ A/m}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_3 = \frac{\mathbf{B}_3}{\mu_3} = \frac{0,30}{\mu_0} \mathbf{e}_r \text{ A/m}$$

Tehtävä 5.

Tasolla $y = 0$ sijaitseva virtataso $\mathbf{K}$ erottaa alueen 1 ($y < 0$ ja $\mu_{r1} = 4$) alueesta 2 ($y > 0$ ja $\mu_{r2} = 6$). Olkoon $\mathbf{B}_1 = 6,0\mathbf{e}_x + 4,0\mathbf{e}_y + 10,0\mathbf{e}_z$ (T) ja $\mathbf{B}_2 = 15,0\mathbf{e}_x + 4,0\mathbf{e}_y - 9,0\mathbf{e}_z$ (T). Määritä $\mathbf{K}$.

Magneettikenttien voimakkuudet:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} = \frac{6,0\mathbf{e}_x + 4,0\mathbf{e}_y + 10,0\mathbf{e}_z}{4\mu_0} = \frac{1,5\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 2,5\mathbf{e}_z}{\mu_0} \text{ A/m}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} = \frac{15,0\mathbf{e}_x + 4,0\mathbf{e}_y - 9,0\mathbf{e}_z}{6\mu_0} = \frac{2,5\mathbf{e}_x + 0,67\mathbf{e}_y - 1,5\mathbf{e}_z}{\mu_0} \text{ A/m}$$

Virtatason aiheuttama lisäys (tangentialisiin komp.) siirryttäessä alueesta 1 alueeseen 2:

$$\mathbf{H}_K = \mathbf{H}_{t1} - \mathbf{H}_{t2} = \frac{1,5\mathbf{e}_x + 2,5\mathbf{e}_z}{\mu_0} - \frac{2,5\mathbf{e}_x - 1,5\mathbf{e}_z}{\mu_0} = \frac{-\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_z}{\mu_0} \text{ A/m}$$

Joten virtataso:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}_K \times \mathbf{e}_{n12} = \frac{-\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_z}{\mu_0} \times \mathbf{e}_y = \frac{-\mathbf{e}_z - 4\mathbf{e}_x}{\mu_0} = \frac{4,1}{\mu_0} \left(\frac{-4\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z}{\sqrt{17}} \right) \frac{\text{A}}{\text{m}}$$