

SATE.10xx Staattisen kenttäteorian laajentaminen Sähkömagneettiseksi kenttäteoriaksi syksy 2012

1 / 5

Laskuharjoitus 4 / Sähkömagneettiset aallot

Tehtävä 1.

Vapaassa tilassa (free space) $\mathbf{D} = D_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x$. Käyttäen Maxwellin yhtälöitä, osoita että $\mathbf{B} = (\omega \mu_0 D_m / \beta) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y$. Piirrä kentät etenemään z-akselin suuntaisesti ajanhetkellä $t = 0$ olettaen, että $D_m > 0$ ja $\beta > 0$.

Maxwellin yhtälön mukaisesti:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Sähkövuontiheyden aikadifferentiaali:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial (D_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x)}{\partial t} = \omega D_m \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x$$

Magneettikentän voimakkuuden roottori karteesisessa koordinaatistossa:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

Sähkökentän tiheydellä vain x-suuntainen komponentti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x &= \omega D_m \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x \\ \Rightarrow -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \omega D_m \cos(\omega t - \beta z) \\ \Rightarrow H_y &= -\omega D_m \int \cos(\omega t - \beta z) dz = \frac{\omega D_m}{\beta} \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

Väliaineiyhtälön perusteella:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{B}} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu_0 \omega D_m}{\beta} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y \text{ T} \quad \text{M.O.T.}}}}}}}}}$$

SATE.10xx Staattisen kenttäteorian laajentaminen Sähkömagneettiseksi kenttäteoriaksi syksy 2012

2 / 5

Laskuharjoitus 4 / Sähkömagneettiset aallot

Tehtävä 2.

Homogeenisessa alueessa $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 20$, $E = 20\pi e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{e}_x$ (V/m) ja $\mathbf{B} = \mu_0 H_m e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{e}_y$ (T). Määritä ω ja H_m , jos aallonpituus on 0,5 m.

Aaltoimpedanssi:

$$\sigma = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \stackrel{\sigma=0}{\Rightarrow} \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi}{20 \cdot 10^{-9}}} = \sqrt{720\pi^2} = 84,3 \, \Omega$$

Aalto etenee suuntaan z:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(E_x)}{\partial z} \mathbf{e}_y - \frac{\partial(E_x)}{\partial y} \mathbf{e}_z \right) = \frac{\partial(E_x)}{\partial z} \mathbf{e}_y = -jE_m \beta e^{j(\omega t - \beta z)} (\mathbf{e}_y)$$

$$\Rightarrow \mathbf{H} = -\frac{jE_m \beta}{j\omega\mu} e^{j(\omega t - \beta z)} (\mathbf{e}_y) = \frac{E_m \frac{\omega}{c}}{\omega\mu} e^{j(\omega t - \beta z)} (\mathbf{e}_y) = \frac{E_m \sqrt{\mu\varepsilon}}{\mu} e^{j(\omega t - \beta z)} (\mathbf{e}_y) = E_m \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e^{j(\omega t - \beta z)} (\mathbf{e}_y)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H_m}} = H_y = \frac{E_m}{\eta} = \frac{20\pi}{84,3} = 0,745 \, \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Kulmataajuus:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega}} = \frac{2\pi}{\lambda \sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi}{0,5 \cdot \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-9}}{36\pi}}} = 8,43 \cdot 10^8 = 843 \cdot 10^6 \, \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Tehtävä 3.

Vapaassa tilassa (in free space) $\mathbf{H}(y, t) = 1,33 \sin(4 \cdot 10^7 t + \beta y) \mathbf{e}_z$ (A/m). Määritä $\mathbf{E}(y, t)$, β ja λ .

Vapaassa tilassa aaltoimpedanssi:

$$\eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi}{10^{-9}}} = 120\pi \Omega$$

Aalto etenee suuntaan -y:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(H_z)}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial(H_z)}{\partial x} \mathbf{e}_y \right) = \frac{\partial(H_z)}{\partial y} \mathbf{e}_x \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \mathbf{H} &= H_m \beta \cos(40 \cdot 10^6 t + \beta y) (\mathbf{e}_x) \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{H_m \beta}{\omega \epsilon} \sin(40 \cdot 10^6 t + \beta y) (\mathbf{e}_x) = \frac{H_m}{\omega \epsilon} \frac{\omega}{c} \sin(40 \cdot 10^6 t + \beta y) (\mathbf{e}_x) = \frac{H_m \sqrt{\mu \epsilon}}{\epsilon} \sin(40 \cdot 10^6 t + \beta y) (\mathbf{e}_x) \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= H_m \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin(40 \cdot 10^6 t + \beta y) (\mathbf{e}_x) = 1,33 \cdot 120\pi \sin(40 \cdot 10^6 t + \beta y) (\mathbf{e}_x) \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= 501 \sin(40 \cdot 10^6 t + \beta y) (\mathbf{e}_x) \text{ V/m} \end{aligned}$$

Vaihekerroin (free space):

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{4 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = \frac{4}{30} = 0,1\bar{3} \text{ rad/m}$$

Aallonpituus:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^7} = 15\pi \text{ m}$$

SATE.10xx Staattisen kenttäteorian laajentaminen Sähkömagneettiseksi kenttäteoriaksi syksy 2012

4 / 5

Laskuharjoitus 4 / Sähkömagneettiset aallot

Tehtävä 4.

Olkoon vapaassa tilassa (in free space) $\mathbf{H}(z, t) = 100 \sin(5 \cdot 10^8 t + \beta z) \mathbf{e}_y$ (A/m). Määritä $\mathbf{E}(z, t)$, β ja λ .

Vapaassa tilassa aaltoimpedanssi:

$$\eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi}{10^{-9}}} = 120\pi \Omega$$

Aalto etenee suuntaan -z:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial(H_y)}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial(H_y)}{\partial x} \mathbf{e}_z \right) = -\frac{\partial(H_y)}{\partial z} \mathbf{e}_x \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \mathbf{H} &= -H_m \beta \cos(5 \cdot 10^8 t + \beta z) (\mathbf{e}_x) \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{-H_m \beta}{\omega \epsilon} \sin(5 \cdot 10^8 t + \beta z) (\mathbf{e}_x) = \frac{-H_m \frac{\omega}{c}}{\omega \epsilon} \sin(5 \cdot 10^8 t + \beta z) (\mathbf{e}_x) = \frac{-H_m \sqrt{\mu \epsilon}}{\epsilon} \sin(5 \cdot 10^8 t + \beta z) (\mathbf{e}_x) \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= -H_m \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin(5 \cdot 10^8 t + \beta z) (\mathbf{e}_x) = -100 \cdot 120\pi \sin(5 \cdot 10^8 t + \beta z) (\mathbf{e}_x) \\ \Rightarrow \mathbf{E}(z, t) &= 12\pi \sin(5 \cdot 10^8 t + \beta z) (-\mathbf{e}_x) \text{ kV/m} \end{aligned}$$

Vaihekerroin (free space):

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{5 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = 1,6 \text{ rad/m}$$

Aallonpituus:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^8} = 3,77 \text{ m}$$

SATE.10xx Staattisen kenttäteorian laajentaminen Sähkömagneettiseksi kenttäteoriaksi syksy 2012

5 / 5

Laskuharjoitus 4 / Sähkömagneettiset aallot

Tehtävä 5.

Olkoon $\mathbf{E}(x, t) = 10\sin(\omega t + \beta x)\mathbf{e}_y + 15\sin(\omega t + \beta x)\mathbf{e}_z$ (V/m). Määritä ko. sähkökentän suuruus ja suunta, kun $t = 0$ ja $x = 3\lambda/4$.

Aalto etenee suuntaan -x:

$$\mathbf{E}(x, t) = 10\sin(\omega t + \beta x)\mathbf{e}_y + 15\sin(\omega t + \beta x)\mathbf{e}_z \text{ V/m}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}\left(\frac{3\lambda}{4}, 0\right) = 10\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda}{4}\right)\mathbf{e}_y + 15\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda}{4}\right)\mathbf{e}_z = 10\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\mathbf{e}_y + 15\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\mathbf{e}_z$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}\left(\frac{3\lambda}{4}, 0\right) = -10\mathbf{e}_y - 15\mathbf{e}_z = 5(-2\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z) = 18,03\left(\frac{-2\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z}{\sqrt{13}}\right) \text{ V/m}$$