

SATE.10xx Staattisen kenttäteorian laajentaminen Sähkömagneettiseksi kenttäteoriaksi syksy 2012

1 / 6

Laskuharjoitus 5 / Sähkömagneettiset aaltojen polarisoituminen ja eteneminen väliaineesta toiseen

Tehtävä 1.

- a) Määritä etenemiskerroin γ 50 kHz:n taajuudella väliaineessa, jolle $\mu_r = 2$, $\epsilon_r = 15$ ja $\sigma = 0$. Millä nopeudella sähkömagneettinen aalto etenee tässä väliaineessa?

Etenemiskerroin:

$$\sigma = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \gamma = j\beta = j\frac{\omega}{v} = j\frac{2\pi f}{\sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}}} = j2\pi f \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\gamma}} = j2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 15 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} = \underline{\underline{j5,73 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}}}$$

Etenemisnopeus:

$$\underline{\underline{v}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 15 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}}} = \underline{\underline{0,548 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$$

- b) Vapaassa tilassa (in free space) sähkömagneettisen aallon vaihekerroin on 0,524 rad/m. Kun ko. aalto saapuu täydelliseen eristeeseen, vaihekerroin on 1,81 rad/m. Olkoon $\mu_t = 1$. Määritä ϵ_r ja aallon etenemisnopeus.

Suhteellinen permittiivisyys täydellisessä eristeessä:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad ; \quad \omega_e = \omega_0 = \omega$$

$$\frac{\beta_e}{\beta_0} = \frac{\omega \sqrt{\mu_e \epsilon_e}}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\epsilon_r}} = \left(\frac{\beta_e}{\beta_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{\mu_r} = \left(\frac{1,81}{0,524} \right)^2 = \underline{\underline{11,9}}$$

Etenemisnopeus täydellisessä eristeessä:

$$\underline{\underline{v_e}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_e \epsilon_e}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{11,9}} = \underline{\underline{0,869 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$$

Tehtävä 2.

E :n amplitudi juuri nesteen pinnassa on 100,0 V/m ja vakiot ovat $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 20$ ja $\sigma = 0,50$ S/m. Määritä E :n amplitudi 10 cm päässä em. rajapinnasta väliaineen sisällä taajuuksilla a) 5 MHz, b) 50 MHz ja c) 500 MHz.

Vaimenemiskerroin osittain johtavassa aineessa:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1 \right]}$$

Vaimenemiskerroin sijoitetaan kaavaan:

$$E = 100e^{-\alpha \cdot 0,1\text{ m}} \text{ V/m}$$

Jolloin:

$$\begin{aligned} \text{a) } f = 5 \text{ MHz} &\Rightarrow \alpha = 3,124 \frac{1}{\text{m}} \Rightarrow \underline{\underline{E = 73,2 \text{ V/m}}} \\ \text{b) } f = 50 \text{ MHz} &\Rightarrow \alpha = 9,398 \frac{1}{\text{m}} \Rightarrow \underline{\underline{E = 39,1 \text{ V/m}}} \\ \text{c) } f = 500 \text{ MHz} &\Rightarrow \alpha = 19,45 \frac{1}{\text{m}} \Rightarrow \underline{\underline{E = 14,3 \text{ V/m}}} \end{aligned}$$

Tehtävä 3.

Sähkömagneettisen aallon sähkökentänvoimakkuus $E = E_0 \cos \left[10^8 \pi \left(t - \frac{z}{c} \right) + \theta \right] \mathbf{e}_x$ on kahden aallon

$E_1 = 0,3 \sin \left[10^8 \pi \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \mathbf{e}_x$ ja $E_2 = 0,4 \cos \left[10^8 \pi \left(t - \frac{z}{c} \right) + \frac{\pi}{3} \right] \mathbf{e}_x$ summa. Määritä E_0 ja θ .

Sähkökenttien voimakkuudet:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} E_1(t, z) = 0,3 \sin \left[10^8 \pi \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \mathbf{e}_x = 0,3 \cos \left[10^8 \pi \left(t - \frac{z}{c} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \mathbf{e}_x \\ E_2(t, z) = 0,4 \cos \left[10^8 \pi \left(t - \frac{z}{c} \right) + \frac{\pi}{3} \right] \mathbf{e}_x \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} E_1(t, z) = \text{Re} \left\{ 0,3 e^{j10^8 \pi \left(t - \frac{z}{c} \right)} e^{-j\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}_x \right\} \\ E_2(t, z) = \text{Re} \left\{ 0,4 e^{j10^8 \pi \left(t - \frac{z}{c} \right)} e^{j\frac{\pi}{3}} \mathbf{e}_x \right\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1(z) = 0,3 e^{-j10^8 \pi \frac{z}{c}} e^{-j\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}_x \\ E_2(z) = 0,4 e^{-j10^8 \pi \frac{z}{c}} e^{j\frac{\pi}{3}} \mathbf{e}_x \end{cases} \end{aligned}$$

Joten kokonaissähkökentän voimakkuus:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_1(z) + E_2(z) = 0,3e^{-j10^8 \pi \frac{z}{c}} e^{-j\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}_x + 0,4e^{-j10^8 \pi \frac{z}{c}} e^{j\frac{\pi}{3}} \mathbf{e}_x \\ \Rightarrow E(z) &= \left(0,3e^{-j\frac{\pi}{2}} + 0,4e^{j\frac{\pi}{3}} \right) e^{-j10^8 \pi \frac{z}{c}} \mathbf{e}_x \\ \Rightarrow E(z) &= \left(-j0,3 + 0,4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) \right) e^{-j10^8 \pi \frac{z}{c}} \mathbf{e}_x \\ \Rightarrow E(z) &= (-j0,3 + 0,2 + j0,346) e^{-j10^8 \pi \frac{z}{c}} \mathbf{e}_x \\ \Rightarrow E(z) &= (0,2 + j0,046) e^{-j10^8 \pi \frac{z}{c}} \mathbf{e}_x = 0,206e^{-j0,04^\circ} e^{-j10^8 \pi \frac{z}{c}} \mathbf{e}_x \\ \Rightarrow E_0 &= 0,21 \frac{\text{V}}{\text{m}} \text{ ja } \theta = 12,95^\circ \end{aligned}$$

Tehtävä 4.

Ilmassa +y suuntaan etenevän tasoallon magneettikentän voimakkuus on

$$\mathbf{H}(y, t) = 4 \cdot 10^{-6} \cos \left(10^7 \pi t - \beta y - \frac{\pi}{6} \right) \mathbf{e}_z \frac{\text{A}}{\text{m}}. \text{ Määritä paikka, missä } H_z \text{ katoaa hetkellä } t = 3 \text{ (ms).}$$

Magneettikentän voimakkuus:

$$\mathbf{H}(y, t) = 4 \cdot 10^{-6} \cos \left(10^7 \pi t - \beta y - \frac{\pi}{6} \right) \mathbf{e}_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Ilmassa β :

$$\underline{\underline{\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{10^7 \pi}{3 \cdot 10^8} = \frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{m}}}}$$

Paikka, missä H_z katoaa hetkellä $t = 3 \text{ (ms)}$.

$$\begin{aligned} H_z &= 4 \cdot 10^{-6} \cos \left(10^7 \pi \cdot 3 \cdot 10^{-3} - \frac{\pi}{30} y - \frac{\pi}{6} \right) \frac{\text{A}}{\text{m}} = 0 \\ \Rightarrow \cos \left(3\pi \cdot 10^4 - \frac{\pi}{30} y - \frac{\pi}{6} \right) &= 0 \quad ; \quad 3\pi \cdot 10^4 = 30000\pi = 15000 \cdot 2\pi \quad ; \quad \cos(2\pi) = 1 \\ \Rightarrow \cos \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{30} y \right) &= 0 \quad ; \quad \cos x = 0, \text{ kun } x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \Rightarrow -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{30} y &= \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \frac{\pi}{30} y = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} - n\pi \Rightarrow \frac{\pi}{30} y = -\left(\frac{4}{6} + n \right) \pi \\ \Rightarrow y &= -\left(\frac{4}{6} + n \right) \pi \cdot \frac{30}{\pi} = -(20 + 30n) \end{aligned}$$

Pienin positiivinen arvo, kun $n = -1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = -(20 - 30) = 10,0 \text{ m}}}$$

Vastaava E :

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = \frac{E_0}{H_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \Rightarrow H_z \mathbf{e}_z \Rightarrow E_x (-\mathbf{e}_x)$$

$$\mathbf{E}(y, t) = 120\pi \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cos\left(10^7 \pi t - \frac{\pi}{30} y - \frac{\pi}{6}\right) (-\mathbf{e}_x) \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{E}(y, t) = 1,508 \cos\left(10^7 \pi t - \frac{\pi}{30} y - \frac{\pi}{6}\right) (-\mathbf{e}_x) \frac{\text{mV}}{\text{m}}}}$$

Tehtävä 5.

Määritä tasoaallon polarisaatio seuraavissa tapauksissa, kun $a = 1 \text{ V/m}$, $b = 2 \text{ V/m}$ ja $c = 3 \text{ V/m}$. Kompleksivektorina esitetty sähkökentänvoimakkuuden funktio on

a) $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = (a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y)e^{-jkz}$

b) $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = (c\mathbf{e}_x + ja\mathbf{e}_y)e^{jkz}$

c) $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = (a\mathbf{e}_x - ja\mathbf{e}_y)e^{-jkz}$

a) $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = (a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y)e^{-jkz}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(z, t) = \text{Re}\left\{(a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y)e^{-jkz}e^{j\omega t}\right\} = (a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y)\cos(\omega t - kz)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(z, t) = (\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y)\cos(\omega t - kz)$$

Sähkökenttä $\mathbf{E}$ on vakiovektorin $\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$ suuntainen

$\Rightarrow$ aalto on lineaarisesti polarisoitunut.

b) $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = (c\mathbf{e}_x + ja\mathbf{e}_y)e^{jkz}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(z, t) = \text{Re}\left\{(c\mathbf{e}_x + ja\mathbf{e}_y)e^{jkz}e^{j\omega t}\right\} = c\cos(\omega t + kz)\mathbf{e}_x - a\sin(\omega t + kz)\mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(z, t) = 3\cos(\omega t + kz)\mathbf{e}_x - \sin(\omega t + kz)\mathbf{e}_y$$

Sähkökenttän $\mathbf{E}$ kärki piirtää ellipsin oikean käden suuntaisesti (positiiviseen suuntaan polarisoitunut)

$\Rightarrow$ aalto on elliptisesti polarisoitunut.

c) $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = (a\mathbf{e}_x - ja\mathbf{e}_y)e^{-jkz}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(z, t) = \text{Re}\left\{(a\mathbf{e}_x - ja\mathbf{e}_y)e^{-jkz}e^{j\omega t}\right\} = a\cos(\omega t - kz)\mathbf{e}_x + a\sin(\omega t - kz)\mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(z, t) = \cos(\omega t - kz)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t - kz)\mathbf{e}_y$$

Sähkökenttän $\mathbf{E}$ kärki piirtää ympyrän oikean käden suuntaisesti

$\Rightarrow$ aalto on ympyräpolarisoitunut.

Tehtävä 6.

Olkoon $\mathbf{E} = 0,1\cos(10\pi x)\sin(6\pi 10^9 t - \beta z) \mathbf{e}_y$ (V/m) ilmassa. Määritä $\mathbf{H}$ ja β .

Sähkökentän voimakkuus:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t, x, z) &= [0,1\cos(10\pi x)\sin(6\pi 10^9 t - \beta z)] \mathbf{e}_y \\ \Rightarrow \mathbf{E}(t, x, z) &= \text{Im} \left[0,1\cos(10\pi x) e^{j(6\pi 10^9 t - \beta z)} \right] \mathbf{e}_y \\ \Rightarrow \mathbf{E}(x, z) &= 0,1\cos(10\pi x) e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y\end{aligned}$$

Magneettikentän voimakkuus:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0,1\cos(10\pi x)e^{-j\beta z} & 0 \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial(0,1\cos(10\pi x)e^{-j\beta z})}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial(0,1\cos(10\pi x)e^{-j\beta z})}{\partial x} \mathbf{e}_z \\ \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} &= -(-j\beta)(0,1\cos(10\pi x)e^{-j\beta z}) \mathbf{e}_x - (10\pi) \cdot (0,1\sin(10\pi x)e^{-j\beta z}) \mathbf{e}_z \\ \Rightarrow \mathbf{H} &= \frac{[(j\beta 0,1\cos(10\pi x)) \mathbf{e}_x - \pi \sin(10\pi x) \mathbf{e}_z] e^{-j\beta z}}{-j\omega\mu} \\ \Rightarrow \mathbf{H} &= \frac{j}{\omega\mu} [(j\beta 0,1\cos(10\pi x)) \mathbf{e}_x - \pi \sin(10\pi x) \mathbf{e}_z] e^{-j\beta z}\end{aligned}$$

Toisaalta:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon\mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ j\beta 0,1\cos(10\pi x)e^{-j\beta z} & 0 & -\pi \sin(10\pi x)e^{-j\beta z} \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{j}{\omega\mu} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial(-\pi \sin(10\pi x)e^{-j\beta z})}{\partial y} \mathbf{e}_x + \left[\frac{\partial(j\beta 0,1\cos(10\pi x)e^{-j\beta z})}{\partial z} - \frac{\partial(-\pi \sin(10\pi x)e^{-j\beta z})}{\partial x} \right] \mathbf{e}_y \\ &- \frac{\partial(j\beta 0,1\cos(10\pi x)e^{-j\beta z})}{\partial y} \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{j}{\omega\mu} \cdot \left[\frac{\partial(j\beta 0,1\cos(10\pi x)e^{-j\beta z})}{\partial z} + \frac{\partial(\pi \sin(10\pi x)e^{-j\beta z})}{\partial x} \right] \mathbf{e}_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{j}{\omega\mu} \cdot \left[(-j\beta) \cdot (j\beta 0,1 \cos(10\pi x) e^{-j\beta z}) + 10\pi \cdot \pi \cos(10\pi x) e^{-j\beta z} \right] \mathbf{e}_y \\ \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{j}{\omega\mu} \cdot [0,1\beta^2 + 10\pi^2] \cos(10\pi x) e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{E} &= \frac{\frac{j}{\omega\mu} \cdot [0,1\beta^2 + 10\pi^2] \cos(10\pi x) e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y}{j\omega\varepsilon} = \frac{[0,1\beta^2 + 10\pi^2] \cos(10\pi x) e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y}{\omega^2 \mu\varepsilon}\end{aligned}$$

Joten vaihekerroin:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{[0,1\beta^2 + 10\pi^2] \cos(10\pi x) e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y}{\omega^2 \mu\varepsilon} = 0,1 \cos(10\pi x) e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y \\ \Rightarrow \frac{[0,1\beta^2 + 10\pi^2]}{\omega^2 \mu\varepsilon} &= 0,1 \Rightarrow 0,1\beta^2 + 10\pi^2 = 0,1\omega^2 \mu\varepsilon \Rightarrow \beta^2 = \frac{0,1\omega^2 \mu\varepsilon - 10\pi^2}{0,1} \\ \underline{\underline{\beta}} &= \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - 100\pi^2} = \sqrt{\frac{(6\pi \cdot 10^9)^2}{(3 \cdot 10^8)^2} - 100\pi^2} = \underline{\underline{54,41 \frac{\text{rad}}{\text{m}}}}\end{aligned}$$

Ja magneettikentän voimakkuus:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(t, x, z) &= \text{Im} \left\{ \mathbf{H}(x, z) e^{j\omega t} \right\} \\ \Rightarrow \mathbf{H}(t, x, z) &= \text{Im} \left\{ \left[\frac{j}{\omega\mu} \left[(j\beta 0,1 \cos(10\pi x)) \mathbf{e}_x - \pi \sin(10\pi x) \mathbf{e}_z \right] e^{-j\beta z} \right] e^{j\omega t} \right\} \\ \Rightarrow \mathbf{H}(t, x, z) &= \text{Im} \left\{ \left[\frac{\beta 0,1 \cos(10\pi x) (-\mathbf{e}_x) - j\pi \sin(10\pi x) \mathbf{e}_z}{\omega\mu} \right] e^{j(\omega t - \beta z)} \right\} \\ \Rightarrow \mathbf{H}(t, x, z) &= \frac{\beta 0,1 \cos(10\pi x) \sin(\omega t - \beta z)}{\omega\mu} (-\mathbf{e}_x) + \frac{\pi \sin(10\pi x) \sin(\omega t - \beta z)}{\omega\mu} (\mathbf{e}_z) \\ \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{H}(t, x, z)}} &= \underline{\underline{2,3 \cos(10\pi x) \sin(6\pi \cdot 10^9 t - 54,41z) (-\mathbf{e}_x) + 1,3 \sin(10\pi x) \cos(6\pi \cdot 10^9 t - 54,41z) (\mathbf{e}_z) \frac{\text{A}}{\text{m}}}}\end{aligned}$$