

SATE.10xx Staattisen kenttäteorian laajentaminen Sähkömagneettiseksi kenttäteoriaksi syksy 2012

1 / 5

Laskuharjoitus 6 / Sähkömagneettiset aaltojen eteneminen väliaineessa ja väliaineesta toiseen

Tehtävä 1.

Määritä suhteet E_{h0}/E_{s0} ja E_{20}/E_{s0} , kun kyseessä on kohtisuorapolarisaatio. Alueella 1 $\epsilon_{r1} = 8,5$, $\mu_{r1} = 1$ ja $\sigma = 0$, alue 2 on vapaa tila (free space) ja $\theta_s = 10^\circ$.

Aaltoimpedanssit:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377,0 \Omega$$
$$\sigma = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$
$$\Rightarrow \eta_e = \sqrt{\frac{\mu_e}{\epsilon_e}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi}{8,5 \cdot 10^{-9}}} = 129,3 \Omega$$

Läpimenokulma θ_2 :

$$\frac{\sin \theta_s}{\sin \theta_2} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}}$$
$$\Rightarrow \sin \theta_2 = \sin \theta_s \sqrt{\frac{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}} = \sin(10^\circ) \cdot \sqrt{\frac{8,5}{1}} = 0,506$$
$$\Rightarrow \theta_2 = 30,4^\circ$$

Heijastus- ja läpimenokertoimet:

$$\frac{E_{h0}}{E_{s0}} = \frac{\eta_0 \cos \theta_s - \eta_e \cos \theta_2}{\eta_0 \cos \theta_s + \eta_e \cos \theta_2} = \frac{377 \cos(10^\circ) - 129,3 \cos(30,4^\circ)}{377 \cos(10^\circ) + 129,3 \cos(30,4^\circ)} = \frac{259,75}{482,80} = \underline{\underline{0,538}}$$
$$\frac{E_2}{E_{s0}} = \frac{2\eta_0 \cos \theta_s}{\eta_0 \cos \theta_s + \eta_e \cos \theta_2} = \frac{2 \cdot 377 \cos(10^\circ)}{377 \cos(10^\circ) + 129,3 \cos(30,4^\circ)} = \frac{742,55}{482,80} = \underline{\underline{1,538}}$$

Tehtävä 2.

Vapaassa tilassa (in free space) $\mathbf{E}(z, t) = 15,0 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x$ (V/m). Määritä kokonaisteho, joka kulkee tasolla $z = 0$ sijaitsevan suorakaiteen muotoisen (30 mm x 15 mm) alueen läpi.

Aaltoimpedanssi vapaassa tilassa (free space):

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi}{10^9}} = 120\pi \Omega$$

Aalto etenee suuntaan $z \rightarrow$ magneettikentän voimakkuus:

$$\mathbf{H}(z, t) = \frac{E_0}{\eta_0} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y = \frac{15,0}{120\pi} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y = \frac{5}{40\pi} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y \text{ A/m}$$

Aikakeskiarvoinen Poynting vektori:

$$\mathcal{P}_{\text{avg}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot \frac{E_0}{\eta_0} (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) = \frac{1}{2} \cdot 15,0 \cdot \frac{5}{40\pi} \mathbf{e}_z = \frac{75}{80\pi} \mathbf{e}_z \text{ W/m}^2$$

Suorakaiteen muotoisen alueen läpi kulkeva teho:

$$\underline{P_{\text{avg}}} = \int_S \underline{\mathcal{P}}_{\text{avg}} \cdot d\mathbf{S} = \int_y^{y+15 \cdot 10^{-3}} \int_x^{x+30 \cdot 10^{-3}} \frac{75}{80\pi} \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{x} d\mathbf{y} \mathbf{e}_z = \frac{75}{80\pi} \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 134 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{134 \mu\text{W}}}$$

Tehtävä 3.

Vapaan tilan (free space) ja johteen rajapinnassa $H_{s0} = 1,0 \text{ A/m}$ vapaan tilan puolella. Taajuus on 318 MHz ja johteen vakiot ovat $\epsilon_r = \mu_r = 1$, $\sigma = 1,26 \text{ MS/m}$. Määritä H_{h0} , H_{20} ja $\underline{H_{20}}$:n tunkeutumissyvyys.

Aaltoimpedanssi vapaassa tilassa (free space):

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi}{10^9}} = 120\pi \Omega$$

Aaltoimpedanssi johteessa:

$$\sigma = 1,26 \cdot 10^6 \gg \omega\epsilon_{\text{johde}} = 2\pi \cdot 318 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} = 17,6 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \eta_{\text{johde}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_{\text{johde}}}{\sigma_{\text{johde}}}} = \sqrt{\frac{j2\pi \cdot 318 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{1,26 \cdot 10^6}} = 0,045 \angle 45^\circ \Omega$$

Heijastumis- ja läpimenokertoimet $\Rightarrow H_{h0}$ ja H_{20} :

$$\frac{H_{h0}}{H_{s0}} = -\frac{\eta_{\text{johde}} - \eta_0}{\eta_{\text{johde}} + \eta_0} \Rightarrow H_{h0} = -\frac{\eta_{\text{johde}} - \eta_0}{\eta_{\text{johde}} + \eta_0} H_{s0}$$

$$\eta_0 = 120\pi \gg \eta_{\text{johde}} = 0,045 \angle 45^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{H_{h0}} \approx -\frac{-\eta_0}{+\eta_0} H_{s0} = H_{s0} = \underline{\underline{1 \text{ A/m}}}$$

$$\frac{H_{20}}{H_{s0}} = \frac{2\eta_0}{\eta_{\text{johde}} + \eta_0}$$

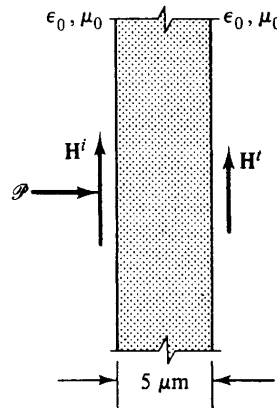
$$\Rightarrow \underline{H_{20}} = \frac{2\eta_0}{\eta_{\text{johde}} + \eta_0} H_{s0} \approx \frac{2\eta_0}{\eta_0} H_{s0} = \underline{\underline{2 \text{ A/m}}}$$

Tunkeutumissyvyys:

$$\underline{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 318 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,26 \cdot 10^6}} = 25,1 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{25,1 \mu\text{m}}}$$

Tehtävä 4.

Vapaassa tilassa kulkeva kenttä $\mathbf{H}$ (amplitudi 1,0 A/m ja taajuus 200 MHz) kohtaa hopealevyn, jonka paksuus on $5 \mu\text{m}$ ja $\sigma = 61,7 \text{ MS/m}$ (Kuva 1). Määritä H_0^t juuri, kun kenttä on kulkenut koko hopealevyn lävitse.



Kuva 1. Periaatekuva tehtävään 3.

Aaltoimpedanssit:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega$$

$$\sigma \gg \omega \epsilon_{\text{hopea}}$$

$$\Rightarrow \eta_{\text{hopea}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_{\text{hopea}}}{\sigma_{\text{hopea}}}} = \sqrt{\frac{j2\pi \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{61,7 \cdot 10^6}} = 5,06 \cdot 10^{-3} \angle 45^\circ \Omega$$

Läpäisykertoimet:

$$\frac{H_{\text{hopea}}^t}{H_0^i} = \frac{2\eta_0}{\eta_{\text{hopea}} + \eta_0} = \frac{2 \cdot 120\pi}{5,06 \cdot 10^{-3} \angle 45^\circ + 120\pi} \approx 2$$

$$\Rightarrow H_{\text{hopea}}^t \approx 2H_0^i = 2 \cdot 1,0 = 2,0 \text{ A/m}$$

$$\frac{H^t}{H_{\text{hopea}}^i} = \frac{2\eta_{\text{hopea}}}{\eta_{\text{hopea}} + \eta_0} = \frac{2 \cdot 5,06 \cdot 10^{-3} \angle 45^\circ}{5,06 \cdot 10^{-3} \angle 45^\circ + 120\pi} \approx \frac{2 \cdot 5,06 \cdot 10^{-3} \angle 45^\circ}{120\pi} = 26,8 \cdot 10^{-6} \angle 45^\circ$$

Aalto vaimenee hopeassa:

$$\alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{\pi \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 61,7 \cdot 10^6} = 220,7 \cdot 10^3 \text{ 1/m}$$

$$\Rightarrow H^t = 2H_0^i e^{-\alpha z} \frac{H^t}{H_{\text{hopea}}^i} = 2 \cdot 1,0 \cdot e^{-220,7 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \cdot 26,8 \cdot 10^{-6} = 17,78 \cdot 10^{-6} \text{ A/m}$$

Tehtävä 5.

Tasoaalto $E_s(z) = E_0 e^{-jk_0 z} \mathbf{e}_x$ saapuu kohtisuoraan paikassa $z = 0$ olevaan eristekerrokseen. Laske heijastuneiden ja läpäisseiden sähkö- ja magneettikenttien lausekkeet, kun $E_0 = 10 \text{ V/m}$, $k_0 = 6 \text{ m}^{-1}$ ja eristekerroksen $\varepsilon = (2,5 - j1,25)\varepsilon_0$. Tarkista kenttien tangentialikomponenttien jatkuvuus rajapinnalla $z = 0$.

Aaltoimpedanssit:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \Omega$$

$$\eta_e = \sqrt{\frac{\mu_e}{\varepsilon_e}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{re}}} = \frac{120\pi}{\sqrt{2,5 - j1,25}} = \frac{120\pi}{\sqrt{2,795 \angle -26,565^\circ}} = \frac{120\pi}{1,67 \angle -13,28^\circ} = 225,74 \angle 13,28^\circ$$

$$\Rightarrow \eta_e = (219,7 + j51,8) \Omega$$

Aaltoluvut:

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 6 \text{ 1/m}$$

$$k_e = \omega \sqrt{\mu_e \varepsilon_e} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \sqrt{\varepsilon_{re}} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{re}} = 6 \sqrt{2,5 - j1,25} = 6 \sqrt{2,795 \angle -26,565^\circ} = 10,03 \angle -13,28^\circ$$

$$\Rightarrow k_e = (9,76 - j2,30) \text{ 1/m}$$

Heijastus- ja läpäisykertoimet:

$$\Gamma = \frac{\eta_e - \eta_0}{\eta_e + \eta_0} = \frac{\frac{120\pi}{\sqrt{2,5 - j1,25}} - 120\pi}{\frac{120\pi}{\sqrt{2,5 - j1,25}} + 120\pi} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2,5 - j1,25}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2,5 - j1,25}} + 1} = \frac{1 - \sqrt{2,5 - j1,25}}{1 + \sqrt{2,5 - j1,25}} = \frac{1 - \sqrt{2,795 \angle -26,565^\circ}}{1 + \sqrt{2,795 \angle -26,565^\circ}}$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1 - 1,67 \angle -13,28^\circ}{1 + 1,67 \angle -13,28^\circ} = \frac{1 - 1,625 + j0,384}{1 + 1,625 - j0,384} = \frac{-0,625 + j0,384}{2,625 - j0,384} = \frac{0,734 \angle 148,43^\circ}{2,652 \angle -8,32^\circ} = 0,277 \angle 156,8^\circ$$

$$\tau = 1 + \Gamma = 1 + 0,277 \angle 156,8^\circ = 1 - 0,255 + j0,109 = 0,745 + j0,109 = 0,753 \angle 8,3^\circ$$

Rajapintaan tuleva sähkö- ja magneettikenttä:

$$\mathbf{E}_s(z) = E_0 e^{-jk_0 z} \mathbf{e}_x \Rightarrow \mathbf{E}_s(z, t) = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \mathbf{e}_x = 10 \cos(\omega t - 6z) \mathbf{e}_x \text{ V/m}$$

$$\mathbf{H}_s(z) = H_0 e^{-jk_0 z} \mathbf{e}_y = \frac{E_0}{\eta_0} e^{-jk_0 z} \mathbf{e}_y \Rightarrow \mathbf{H}_s(z, t) = \frac{E_0}{\eta_0} \cos(\omega t - k_0 z) \mathbf{e}_y = 26,53 \cos(\omega t - 6z) \mathbf{e}_y \text{ mA/m}$$

Rajapinnasta heijastuva sähkö- ja magneettikenttä:

$$\mathbf{E}_h(z) = \Gamma E_0 e^{jk_0 z} \mathbf{e}_x \Rightarrow \mathbf{E}_h(z, t) = |\Gamma| E_0 \cos(\omega t + k_0 z + \theta_\Gamma) \mathbf{e}_x = 2,77 \cos(\omega t + 6z + 156,8^\circ) \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{H}_h(z) = \Gamma H_0 e^{jk_0 z} (-\mathbf{e}_y) = \frac{\Gamma E_0}{\eta_0} e^{jk_0 z} (-\mathbf{e}_y)$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_h(z, t) = \frac{\Gamma E_0}{\eta_0} \cos(\omega t + k_0 z + \theta_\Gamma) (-\mathbf{e}_y) = 7,35 \cos(\omega t + 6z + 156,8^\circ) (-\mathbf{e}_y) \text{ mA/m}$$

Rajapinnan läpi menevä sähkö- ja magneettikenttä:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{läp}}(z) &= \tau E_0 e^{-jkz} \mathbf{e}_x \Rightarrow \mathbf{E}_{\text{läp}}(z, t) = |\tau| E_0 \cos(\omega t - kz + \theta_\tau) \mathbf{e}_x = 7,53 e^{-2,3z} \cos(\omega t - 9,76z + 8,3^\circ) \mathbf{e}_x \\ \mathbf{H}_{\text{läp}}(z) &= \tau H_0 e^{-jkz} \mathbf{e}_y = \frac{\tau E_0}{\eta_e} e^{-jk_0 z} \mathbf{e}_y \\ \Rightarrow \mathbf{H}_{\text{läp}}(z, t) &= \frac{\tau E_0}{\eta_e} \cos(\omega t - kz + \theta_\tau + \theta_{\eta_e}) \mathbf{e}_y = 33,40 e^{-2,3z} \cos(\omega t - 9,76z + 8,3^\circ - 13,3^\circ) \mathbf{e}_y \text{ mA/m} \end{aligned}$$

Jatkuvuusehdon tarkastaminen rajapinnassa $z = 0$ ajanhetkellä $t = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_h &= (10 + 2,77 \cos 156,8^\circ) \mathbf{e}_x = 7,45 \mathbf{e}_x = 7,53 \cos 8,3^\circ \mathbf{e}_x = \mathbf{E}_{\text{läp}} \\ \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_h &= (26,53 - 7,35 \cos 156,8^\circ) \mathbf{e}_y = 33,3 \mathbf{e}_y = 33,40 \cos(-5,0^\circ) \mathbf{e}_y = \mathbf{H}_{\text{läp}} \end{aligned}$$