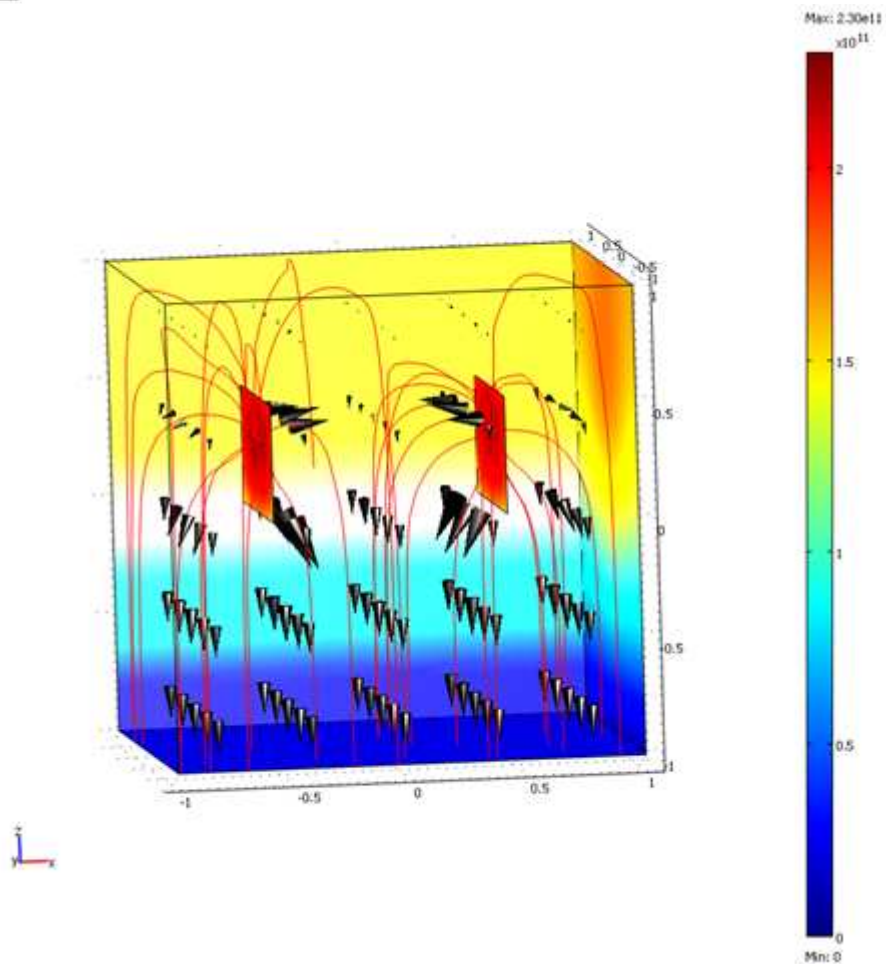


SATE.1060 STAATTINEN KENTTÄTEORIA

Maarit Vesapuisto



Vaasan yliopisto
Teknillinen tiedekunta
Sähkötekniikka

Luentomoniste 2010

SISÄLLYLUETTELO

1. Vektorianalyysi

Vektori ja skalaari	1
Yksikkövektori	2
Vektori karteesisessa koordinaatissa	2
Vektorin pituus	3
Yksikkövektori	4
Vektorien yhteen- ja vähennyslasku	4
Skalaari- eli pistetulo	6
Vektori- eli ristitulo	8
Oikean käden- sääntö	9
Koordinaatistot	11
Koordinaatiston vaihto	13
Pituusalkiot	18
Pinta-alkiot	19
Tilavuusalkiot	21
Esim. Kahden pisteen välinen etäisyys sylinterikoordinaatistossa	22

2. Coulombin voimat ja sähkökentän voimakkuus

Coulombin laki	23
Sähkökentän voimakkuus	25
Derivointikaavoja	26
Integrointikaavoja	27
Pistevarauksen aikaansaama sähkökentän voimakkuus	28
Varausjakaumat	29

3. Sähkövuo ja Gaussin laki

Kokonaisvaraus	34
Sähkövuo	35
Sähkövuon tiheys	35
Differentiaallinen sähkövuo	36
Gaussin laki	36
Pistevarauksen aikaansaama sähkövuon tiheys ja sähkökentän voimakkuus	38
Gaussin ” pinta ”	38

4. Divergenssi ja divergenssi teoreema

Divergenssi	40
Vektorikentän divergenssi	41
Sähkövuon tiheyden divergenssi	47
Maxwellin 1. yhtälö staattisille kentille	48
Nabla	48
Divergenssiteoreema	49

5. Sähköstaattinen kenttä: työ, energia ja potentiaali

Varaus sähkökentässä	50
Työ ja differentiaalinen työ	51

Differentiaaliset etäisyysvektorit	51
Konservatiivisuus	52
Pisteiden välinen potentiaali	52
Pistevarauksen potentiaali	53
Varausjakauman potentiaali	53
Pisteiden (M ja N) välinen etäisyys	54
Skalaarifunktio V	54
Gradientti	55
Sähkökentän voimakkuuden ja potentiaalin välinen yhteys	56
Staattisessa sähkökentässä oleva energia	56
Staattiseen sähkökenttään varastoitunut energia	57

6. Virta, virtatiheys ja johteet

Sähkövirta	58
Varaus tyhjiössä	58
Varaus nesteessä / kaasussa	59
Liikkuvuus	59
Virtatiheys	60
Johdinvirtatiheys	60
Johtavuus nesteessä / kaasussa	61
Johtavuus johteissa	61
Johtavuus puolijohteissa	62
Virta	62
Kokonaisvirta johtimessa	63
Johtimen resistanssi R virtatiheyden ollessa vakio	63
Johtimen resistanssi R virtatiheyden ollessa ei-vakio	64
Virtatason virtatiheys	64
Virran jatkuvuusehto	65
Johteen ja eristeen väliset rajapintaehdot	65
Sähkökenttä ja vuontiheys johteessa	66
Sähkökentän ja vuontiheyden tangentialinen komponentti rajapinnassa	66
Gaussin lain sovellus rajapinnassa	67

7. Kapasitanssi ja eristeaineet

Atomin polarisoituminen	68
Sähköinen dipolimomentti	69
Polarisaatio eristeessä	69
Polarisaatio makrotasolla	70
Polarisaatio isotrooppisessa aineessa	70
Kapasitanssi	71
Rinnan kytketyt kapasitanssit	71
Sarjaan kytketyt kapasitanssit	72
Sähkökenttään varastoitunut energia	72
Kapasitanssiin varastoitunut energia	73
Levykondensaattori vakiojännitteeseen kytkettynä	73
Levykondensaattorin levyillä vakio varaus	74
Rajapintaehdot kahden eristeaineen rajapinnalla	74

8. Laplacen yhtälö

Johdanto	76
Poissonin yhtälö	76
Laplacen yhtälö	77
Laplacen yhtälö eri koordinaatistoissa	77
” Ainoa laatuisuus ”	79
Keskiarvoteoreema	79
Maksimiarvoteoreema	80
Yksi muuttuja karteesisessa koordinaatistossa	80
Integroinnit	81
Rajaehdot	81
Sähkökentän voimakkuus	82
Varaustiheys johdelevyillä	82

9. Amperen laki ja magneettikenttä

Staattinen magneettikenttä	83
Magneettivuon tiheys	84
Magneettikentän voimakkuus	84
Vektorikentän roottori	85
Roottori yleisessä muodossa	85
Roottori eri koordinaatistoissa	86
Roottorin ominaisuuksia	87
Biot’n ja Savartin laki	88
Amperen laki	89
Amperen lain sovelluksen ehdot	90
Magneettikentän voimakkuuden roottori	90
Magneettivuo	91
Magneettikentän vektoripotentiaali	91
Vektoripotentiaalit perusvirtajakaumille	92
Stokesin lause	92

10. Magneettikentässä vaikuttavat voimat ja vääntömomentit

Lorenzin voimalaki	93
Magneettisen voiman riippuvuus virran suunnasta	94
Työ	94
Vääntömomentti (N / m)	95
Virtasilmutka esimerkki : voima	95
Virtasilmutka esimerkki : vääntömomentti	96
Magneettimomentti	96

SATE.1060 STAATTINEN KENTTÄTEORIA

1. VEKTORIANALYYSI

Vektori ja skalaari

- ♦ vektorilla A on sekä pituus (magnitude) että suunta (direction)
- ♦ skalaarilla A on vain pituus

Yksikkövektori

Yksikkövektorin $\mathbf{e}_A$ (unit vector) pituus on 1.

Vektorin $\mathbf{A}$ suuntainen yksikkövektori $\mathbf{e}_A$:

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

Vektori karteesisessa koordinaatistossa

Karteesisessa koordinaatistossa (x, y, z) :

- ♦ akselien suuntaiset yksikkövektorit: $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$
- ♦ mielivaltainen vektori:

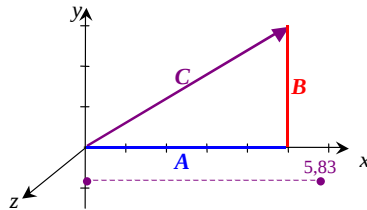
$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$$

- ♦ vektorin $\mathbf{A}$ pituus:

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Vektorin pituus

Olkoon vektori $C = 5e_x + 3e_y$ (x, y, z -koordinaatistossa)



Pythagoraan lauseen mukaisesti: $|C|^2 = A^2 + B^2$

nyt: $A = C_x$ ja $B = C_y$

$$\Rightarrow |C| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} = 5,83$$

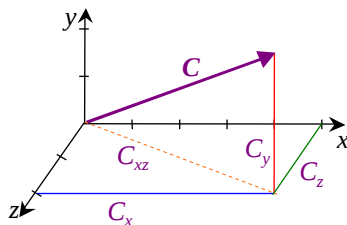
12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

5 / 44

Vektorin pituus

Olkoon vektori $C = 5e_x + 3e_y + 2e_z$ (x, y, z -koordinaatistossa)



$$C_{xz} = \sqrt{C_x^2 + C_z^2}$$

$$|C| = \sqrt{C_{xz}^2 + C_y^2} = \sqrt{(\sqrt{C_x^2 + C_z^2})^2 + C_y^2}$$

$$\Rightarrow |C| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$$

Pythagoraan lauseen mukaisesti:

$$|C| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{38} = 6,16$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

6 / 44

Yksikkövektori

Olkoon vektori: $\mathbf{A} = 2\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z$.

$\Rightarrow$ Vektorin $\mathbf{A}$ suuntainen yksikkövektori:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_A &= \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{2\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{e}_x + \frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{e}_y - \frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Vektorien yhteen- ja vähennyslasku

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B}$$

$$= (A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z) \pm (B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z)$$

$$= (A_x \pm B_x)\mathbf{e}_x + (A_y \pm B_y)\mathbf{e}_y + (A_z \pm B_z)\mathbf{e}_z$$

Liitântä-, osittelu- ja vaihdantalaki:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

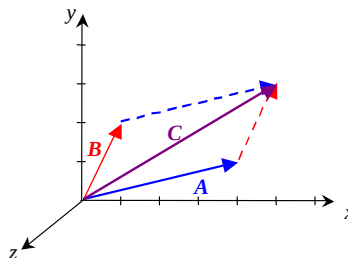
$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$$

$$(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Vektorien yhteenlasku

Olkoon vektorit: $\mathbf{A} = 4\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$ ja $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$

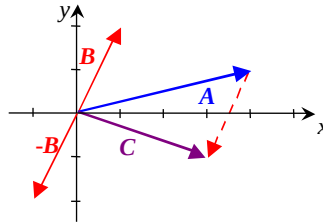


$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (4\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + (\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y) = 5\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{A} = (\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y) + (4\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) = 5\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y$$

Vektorien vähennyslasku

Olkoon vektorit: $\mathbf{A} = 4\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$ ja $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$



$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = (4\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + (-\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y) = 3\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y$$

Skalaari- eli pistetulo

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$

θ on vektorien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ välinen pienempi kulma

Skalaari- eli pistetulo

Skalaari- eli pistetulolle pätee osittelulaki ja skalaarien kertolaskusäännöt:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \cdot k\mathbf{B} = k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

12.01.2009

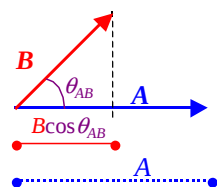
SATE.1060.01 / mv

13 / 44

Skalaari- eli pistetulo: $C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta_{AB}$

Olkoon vektorit:

a) $\mathbf{A} = 8\mathbf{e}_x$ ja $\mathbf{B} = 4\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y$



$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2} = \sqrt{8^2} = 8$$

$$|\mathbf{B}| = B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos \theta_{AB} = \frac{B_x}{B} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (8\mathbf{e}_x) \cdot (4\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y) = (8 \cdot 4) + (0 \cdot 4) = 32$$

$$C = AB \cos \theta_{AB} = 8 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 32$$

Eli: "vektorin $\mathbf{A}$ pituus" kertaa "vektorin $\mathbf{B}$ projisio pituus vektorille $\mathbf{A}$ "

12.01.2009

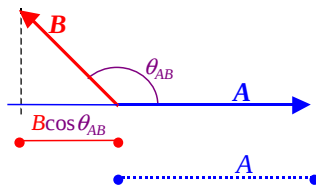
SATE.1060.01 / mv

14 / 44

Skalaari- eli pistetulo: $C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta_{AB}$

Olkoon vektorit:

b) $\mathbf{A} = 8\mathbf{e}_x$ ja $\mathbf{B} = -4\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y$



$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2} = \sqrt{8^2} = 8$$

$$|\mathbf{B}| = B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos \theta_{AB} = \frac{B_x}{B} = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (8\mathbf{e}_x) \cdot (-4\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y) = -32$$

$$C = AB \cos \theta_{AB} = 8 * 4\sqrt{2} * \frac{-1}{\sqrt{2}} = -32$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

15 / 44

Vektori- eli ristitulo

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin \theta) \mathbf{e}_n$$

- θ on vektorien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ välinen pienempi kulma
- $\mathbf{e}_n$ on vektorien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ määrittämän tason (kun ko. vektorit on piirretty samasta pisteestä) normaalin suuntainen yksikkövektori

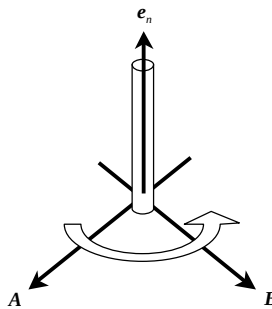
12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

16 / 44

Oikean käden -sääntö

Tason normaali valitaan oikean käden
korkkiruuvisäännön mukaisesti:



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

17 / 44

Vektoritulo komponenttimuodossa

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \times (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z)$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z$$

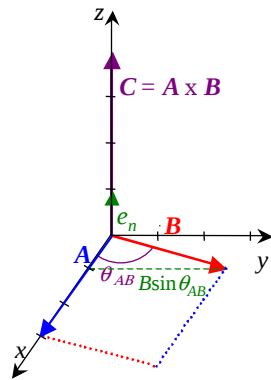
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

18 / 44

Vektori- eli ristitulo: $C = A \times B = |AB \sin \theta_{AB}| e_n$



Olkoon vektorit:

$$A = 3e_x \text{ ja } B = e_x + 3e_y$$

$$|A| = A = \sqrt{A_x^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

$$|B| = B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\sin \theta_{AB} = \frac{B_y}{B} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

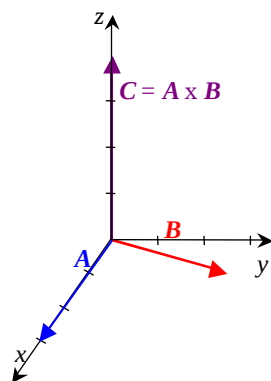
$$C = |AB \sin \theta_{AB}| e_n = \left| 3 * \sqrt{10} * \frac{3}{\sqrt{10}} \right| e_z = 9e_z$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

19 / 44

Vektori- eli ristitulo



Olkoon vektorit:

$$A = 3e_x \text{ ja } B = e_x + 3e_y$$

$$C = A \times B = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9e_z$$

12.01.2009

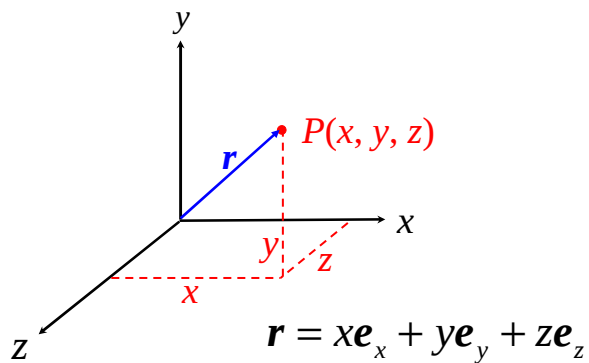
SATE.1060.01 / mv

20 / 44

Koordinaatistot

Suorakulmainen (karteesinen) koordinaatisto:

$P(x, y, z)$



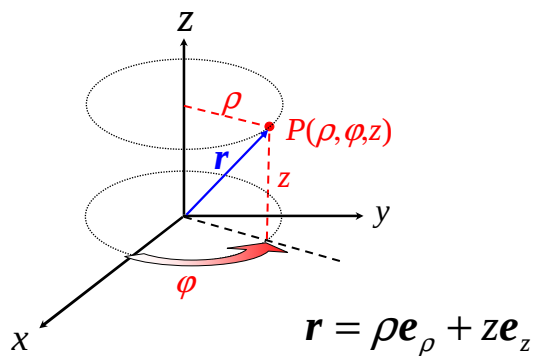
12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

21 / 44

Koordinaatistot

Sylinterikoordinaatisto: $P(\rho, \varphi, z)$



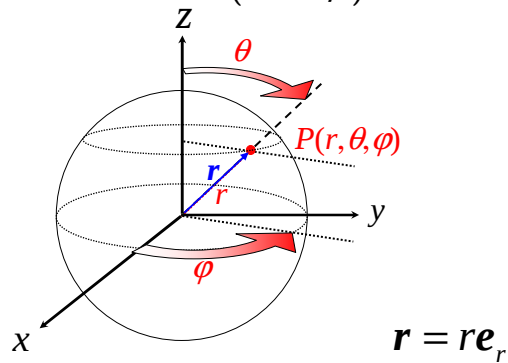
12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

22 / 44

Koordinaatistot

Pallokoordinaatisto: $P(r, \theta, \varphi)$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

23 / 44

Koordinaatistot

Vektorit komponenttimuodossa:

♦ karteesinen: $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$

♦ sylinterik.: $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$

♦ pallok.: $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

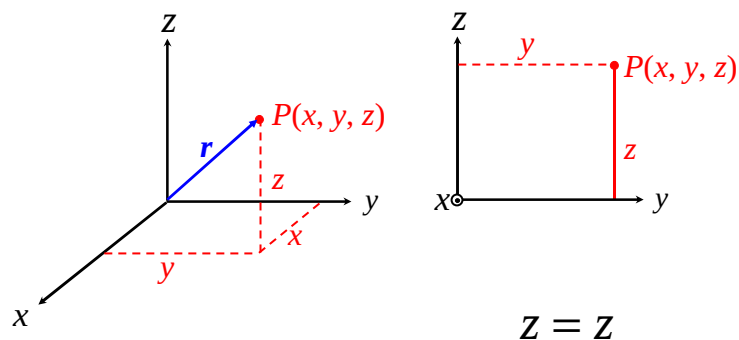
24 / 44

Koordinaatistot

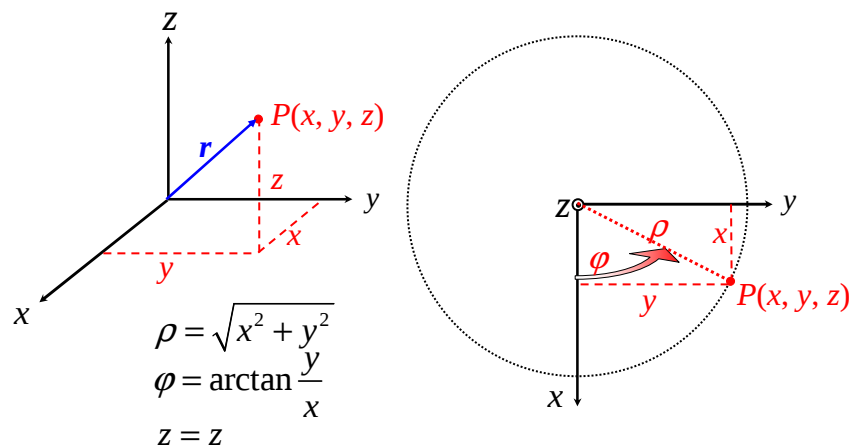
”Suunta”vektorit noudattavat oikean käden –sääntöä:

- ♦ karteesinen $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$
 $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x$
 $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$
- ♦ sylinterik. $\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z$
 $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho$
 $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\varphi$
- ♦ pallok. $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi$
 $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r$
 $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$

Karteesinen -> sylinterik.



Karteesinen -> sylinterik.

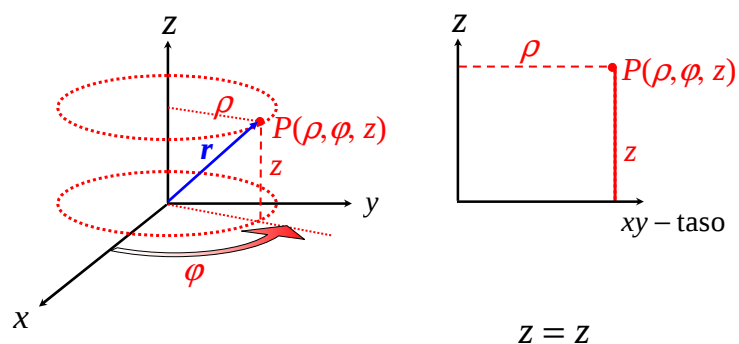


12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

27 / 44

Sylinterik. -> karteesinen

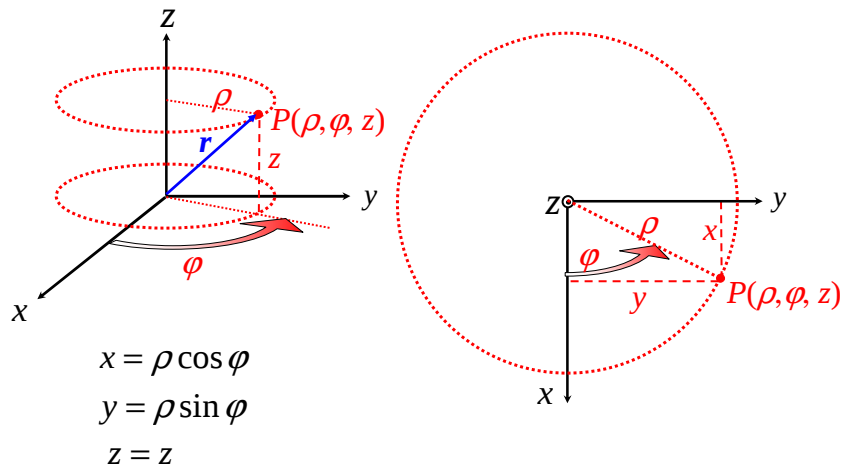


12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

28 / 44

Sylinterik. -> karteesinen

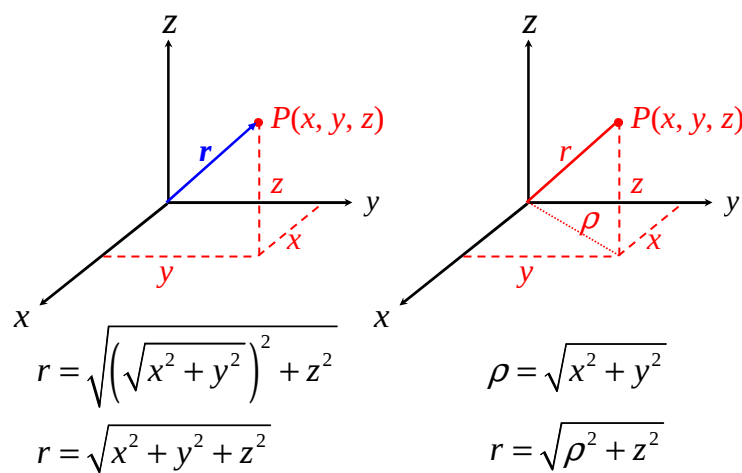


12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

29 / 44

Karteesinen -> pallok.

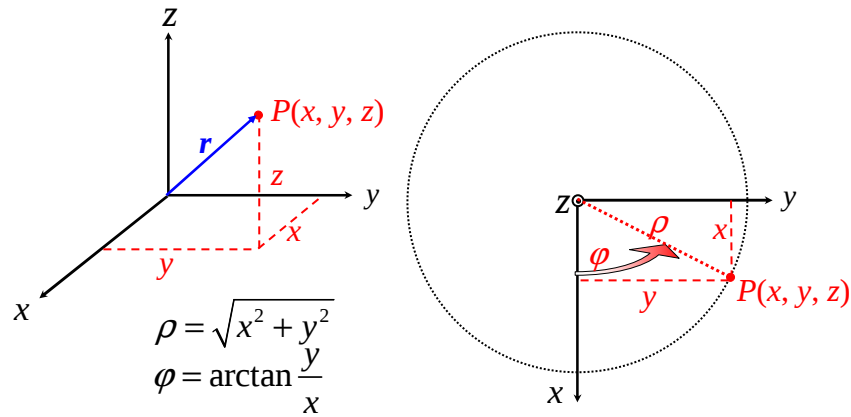


12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

30 / 44

Karteesinen -> pallok.

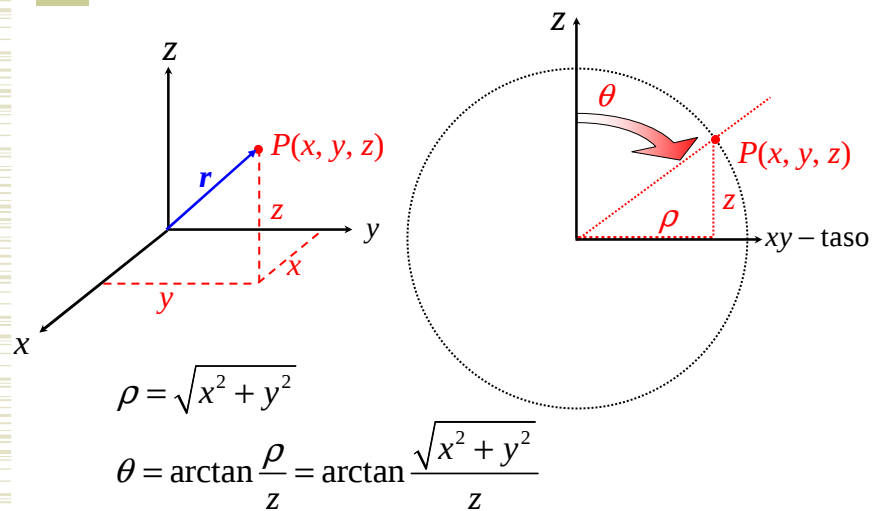


12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

31 / 44

Karteesinen -> pallok.

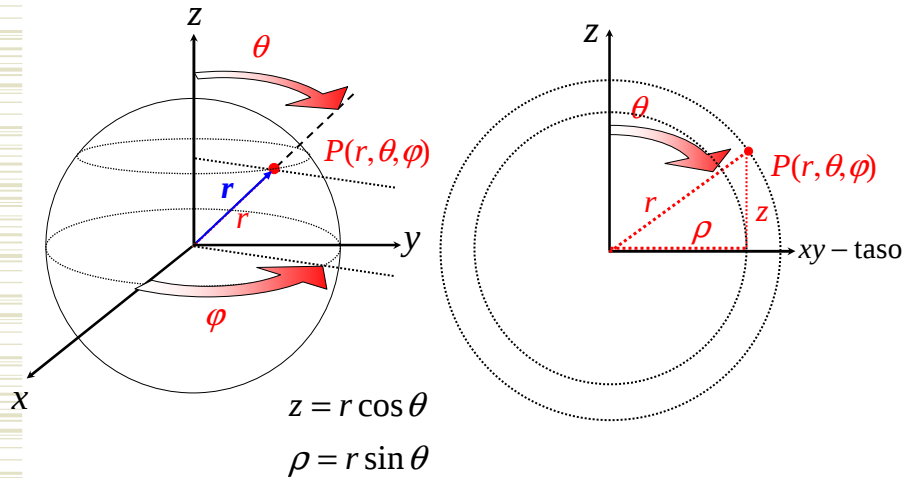


12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

32 / 44

Pallok -> karteesinen

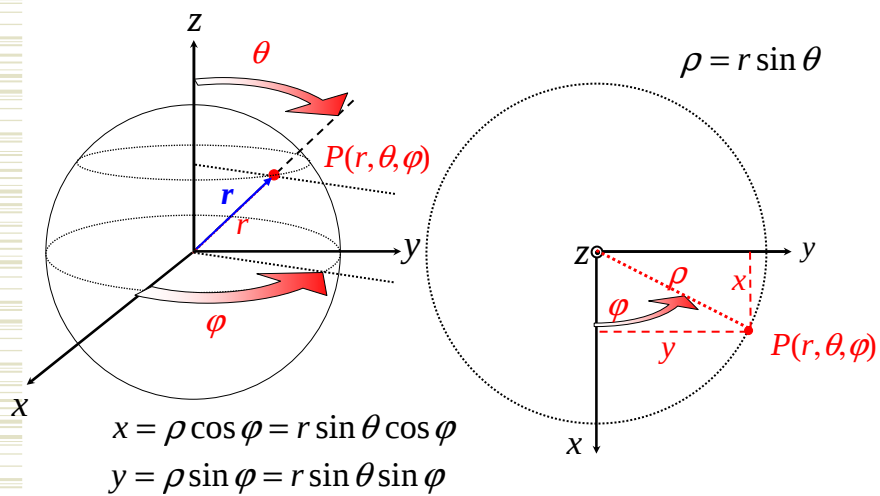


12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

33 / 44

Pallok -> karteesinen



12.01.2009

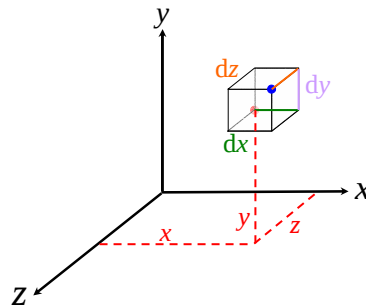
SATE.1060.01 / mv

34 / 44

Pituusalkiot

Karteesinen koordinaatisto:

$$dl = dx + dy + dz$$



12.01.2009

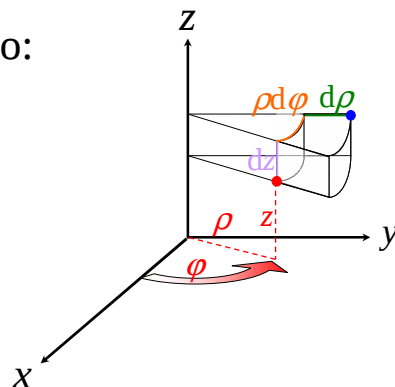
SATE.1060.01 / mv

35 / 44

Pituusalkiot

Sylinterikoordinaatisto:

$$dl = d\rho + \rho d\phi + dz$$



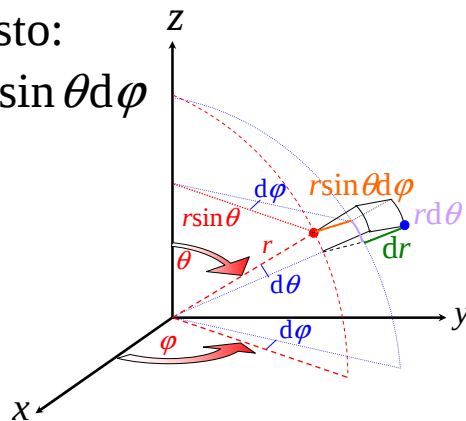
12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

36 / 44

Pituusalkiot

Pallokoordinaatisto:
 $dl = dr + r d\theta + r \sin \theta d\varphi$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

37 / 44

Pinta-alkiot

Karteesinen koordinaatisto:

$$dS_x = dydz$$

$$dS_y = dxdz$$

$$dS_z = dxdy$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

38 / 44

Pinta-alkiot

Sylinterikoordinaatisto:

$$dS_\rho = (\rho d\varphi) dz = \rho d\varphi dz$$

$$dS_\varphi = d\rho dz$$

$$dS_z = d\rho (\rho d\varphi) = \rho d\rho d\varphi$$

Pinta-alkiot

Pallokoordinaatisto:

$$dS_r = (rd\theta)(r \sin \theta d\varphi) = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dS_\theta = dr (r \sin \theta d\varphi) = r \sin \theta dr d\varphi$$

$$dS_\varphi = dr (rd\theta) = r dr d\theta$$

Tilavuusalkiot

Kartesinen koordinaatisto:

$$dV = dx dy dz$$

Sylinterikoordinaatisto:

$$dV = d\rho (\rho d\varphi) dz = \rho d\rho d\varphi dz$$

Pallokoordinaatisto:

$$\begin{aligned} dV &= dr (r d\theta) (r \sin \theta d\varphi) \\ &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Tilavuusalkiot

Animaatiosivu pinta- ja tilavuusalkioista:

<http://www.uwasa.fi/~mave/SAH105anim1.html>

Esim. 5: Kahden pisteen välinen etäisyys sylinterikoordinaatistossa (1/2)

Pisteiden $P_1(4, 3\pi/2, 0)$ ja $P_2(5, \pi/2, 10)$ välinen etäisyys:

Määritetään ensin vektorit $\mathbf{r}_1$ ja $\mathbf{r}_2$ karteesisessa koordinaatistossa:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 * \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 & x_2 &= 5 * \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y_1 &= 4 * \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -4 & y_2 &= 5 * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \\ z_1 &= 0 & z_2 &= 10 \end{aligned}$$

Esim. 5: Kahden pisteen välinen etäisyys sylinterikoordinaatistossa (2/2)

Joten $\mathbf{r}_1 = -4\mathbf{e}_y$ ja $\mathbf{r}_2 = 5\mathbf{e}_y + 10\mathbf{e}_z$

Ja pisteiden välinen etäisyys:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}| &= |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |-4\mathbf{e}_y - (5\mathbf{e}_y + 10\mathbf{e}_z)| = |-9\mathbf{e}_y + 10\mathbf{e}_z| \\ &= \sqrt{(-9)^2 + 10^2} = \sqrt{181} \approx 13,4 \end{aligned}$$

SAH105 STAATTINEN KENTTÄTEORIA

2. COULOMBIN VOIMAT JA SÄHKÖKENTÄN VOIMAKKUUS

Coulombin laki

Kahden varauksen välillä vaikuttaa voima F [N], joka on suoraan verrannollinen varauksien (Q_1 ja Q_2 [C]) suuruuteen ja kääntäen verrannollinen etäisyyden (d [m]) neliöön:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon d^2} \mathbf{e}$$

(väliaineen permittiivisyys: $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$; tyhjän permittiivisyys: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m
 ϵ_r = suhteellinen permittiivisyys)

Coulombin laki: kaksi pistevarausta

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_{21}^2} \mathbf{e}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_{21}^3} \mathbf{R}_{21}$$

$\mathbf{F}_1$ on varauksen Q_2 aiheuttama voima varaukseen Q_1

$\mathbf{e}_{21}$ on yksikkövektori, jonka suunta on varauksen Q_2 (olinpaikka)pisteestä r_2 varauksen Q_1 pisteeseen r_1

$\mathbf{R}_{21} = R_{21} \mathbf{e}_{21}$ on vektori, joka pisteestä r_2 pisteeseen r_1

Coulombin laki: useita pistevarauksia

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=2}^n \frac{Q_k}{R_{k1}^2} \mathbf{e}_{k1}$$

$\mathbf{F}_1$ on varauksien $Q_2 \dots Q_n$ yhteensä aiheuttama voima varaukseen Q_1

Coulombin laki: varaukselle

Eristetyn varauksen Q ympärillä voimakenttä on pallosymmetrinen (varaus pallokoord. origossa)

Sähkökentän voimakkuus

Sähkökentän voimakkuus E [V/m tai N/C] on määritelty Coulombin lain avulla:

$$E = \frac{F_t}{Q_t} \quad F_t = \frac{Q_t Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

F_t on varauksen Q aiheuttama voima etäisyydellä r olevaan pieneen testivaraukseen Q_t ($Q_t \ll Q$)

Derivointikaavoja 1/2

Seuraavissa kaavoissa u ja v ovat x :n funktioita; A ja n ovat vakioita

$$1) \frac{d}{dx} A = 0$$

$$4) \frac{d}{dx} uv = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$2) \frac{d}{dx} Ax = A$$

$$5) \frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$3) \frac{d}{dx} Ax^n = nAx^{n-1}$$

Derivointikaavoja 2/2

Seuraavissa kaavoissa u ja v ovat x :n funktioita; A ja n ovat vakioita

$$6) \frac{d}{dx} \sin u = \frac{du}{dx} \cos u$$

$$8) \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$7) \frac{d}{dx} \cos u = -\frac{du}{dx} \sin u$$

$$9) \frac{d}{dx} e^u = \frac{du}{dx} e^u$$

Integrointikaavoja 1/3

Seuraavissa kaavoissa u ja v ovat x :n funktioita; A ja n ovat vakioita

$$1) \int A \, dx = Ax$$

$$2) \int A f(x) \, dx = A \int f(x) \, dx$$

$$3) \int (u \pm v \pm \dots) \, dx = \int u \, dx \pm \int v \, dx \pm \dots$$

$$4) \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

53 / 44

Integrointikaavoja 2/3

Seuraavissa kaavoissa u ja v ovat x :n funktioita; A ja n ovat vakioita

$$5) \int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

$$6) \int \frac{1}{u} \, du = \begin{cases} \ln u, u > 0 \\ -\ln u, u < 0 \end{cases}$$

$$7) \int e^u \, du = e^u$$

$$8) \int A^u \, du = \int e^{u \ln A} \, du = \frac{e^{u \ln A}}{\ln A} = \frac{A^u}{\ln A}, A > 0, A \neq 1$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

54 / 44

Integrointikaavoja 3/3

Seuraavissa kaavoissa u ja v ovat x :n funktioita; A ja n ovat vakioita

$$9) \int \sin u \, du = -\cos u$$

$$13) \int e^{Ax} \, dx = \frac{e^{Ax}}{A}$$

$$10) \int \cos u \, du = \sin u$$

$$14) \int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

$$11) \int \sin Ax \, dx = -\frac{\cos Ax}{A}$$

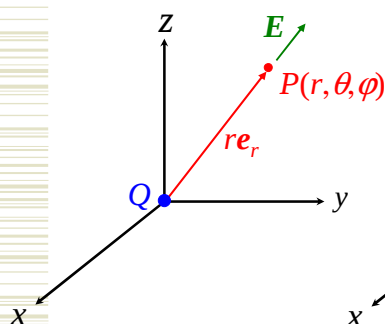
$$12) \int \cos Ax \, dx = \frac{\sin Ax}{A}$$

12.01.2009

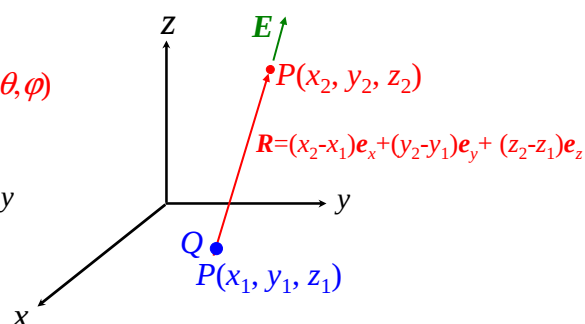
SATE.1060.01 / mv

55 / 44

Pistevarauksen aikaansaama sähkökentän voimakkuus



$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$



$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_R$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

56 / 44

Varausjakaumat: tilavuusvaraus

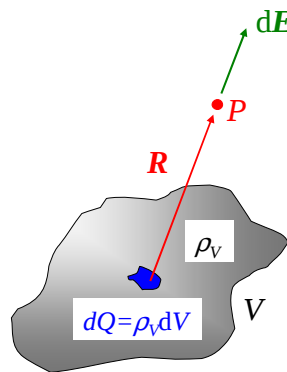
Tilavuusvaraus ρ_V [C/m³]:

$$\rho_V = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho_V dV$$

Sähkökentän voimakkuus:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_R$$

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{\rho_V}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_R dV$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

57 / 44

Varausjakaumat: tasovaraus

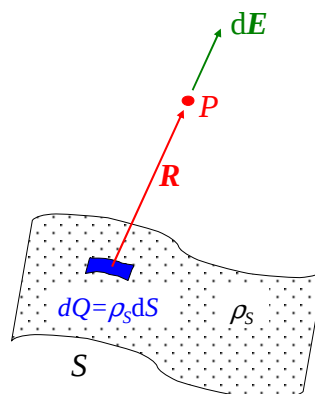
Tasovaraus ρ_S [C/m²]:

$$\rho_S = \frac{dQ}{dS} \Rightarrow dQ = \rho_S dS$$

Sähkökentän voimakkuus:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_R$$

$$\mathbf{E} = \int_S \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_R dS$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

58 / 44

Varausjakaumat: viivavaraus

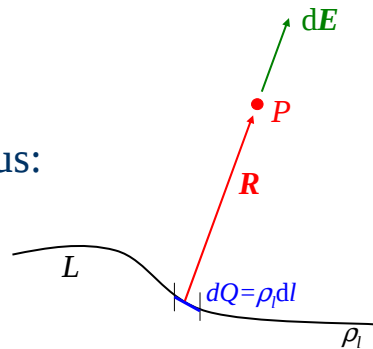
Viivavaraus ρ_l [C/m]:

$$\rho_l = \frac{dQ}{dl} \Rightarrow dQ = \rho_l dl$$

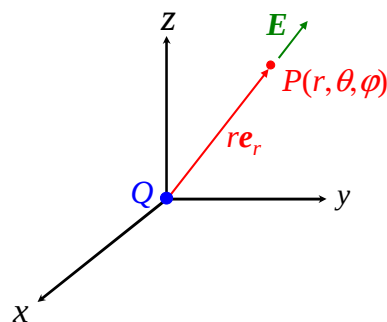
Sähkökentän voimakkuus:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_R$$

$$\mathbf{E} = \int_l \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_R dl$$



Varausjakaumat: pistevaraus



$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

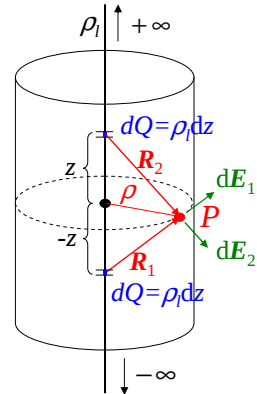
Varausjakaumat: ääretön viivavaraus

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_R = \frac{\rho_l dz}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_R$$

$$d\mathbf{E}_1 = \frac{\rho_l dz}{4\pi\epsilon \left(\sqrt{\rho^2 + z^2} \right)^2} \frac{\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$d\mathbf{E}_2 = \frac{\rho_l dz}{4\pi\epsilon \left(\sqrt{\rho^2 + (-z)^2} \right)^2} \frac{\rho \mathbf{e}_\rho - z \mathbf{e}_z}{\sqrt{\rho^2 + (-z)^2}}$$

Koska jokaiselle paikassa z olevalle varaukselle dQ on olemassa paikassa $-z$ varaus $dQ \Rightarrow z$ -komponentti katoaa



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

61 / 44

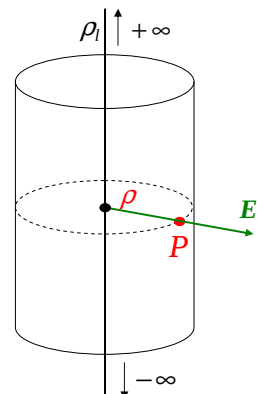
Varausjakaumat: ääretön viivavaraus

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_l \rho dz}{4\pi\epsilon (\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l \rho}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\rho$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + A^2)^{3/2}} = \frac{x}{A^2 \sqrt{x^2 + A^2}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l \rho}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\rho^2 (\rho^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{e}_\rho$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

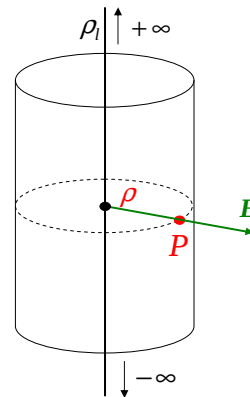
62 / 44

Varausjakaumat: ääretön viivavaraus

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon\rho} \left[\frac{\infty}{(\rho^2 + \infty^2)^{3/2}} - \frac{-\infty}{(\rho^2 + (-\infty)^2)^{3/2}} \right] \mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon\rho} \left[\frac{\infty}{\infty} - \frac{-\infty}{\infty} \right] \mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon\rho} \mathbf{e}_\rho$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

63 / 44

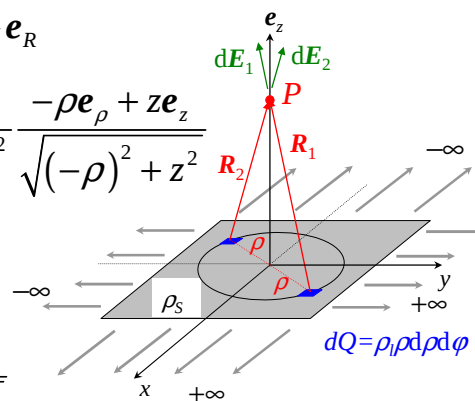
Varausjakaumat: ääretön tasovaraus

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_R = \frac{\rho_s dS}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_R$$

$$d\mathbf{E}_1 = \frac{\rho_s \rho d\rho d\phi}{4\pi\epsilon \left(\sqrt{(-\rho)^2 + z^2} \right)^2} \frac{-\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z}{\sqrt{(-\rho)^2 + z^2}}$$

$$d\mathbf{E}_1 : \rho \mathbf{e}_\rho = \frac{x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d\mathbf{E}_2 : \rho \mathbf{e}_\rho = \frac{-x \mathbf{e}_x - y \mathbf{e}_y}{\sqrt{(-x)^2 + (-y)^2}}$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

64 / 44

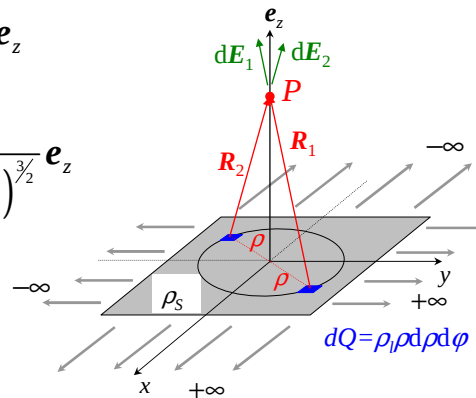
Varausjakaumat: ääretön tasovaraus

Koska jokaiselle paikassa (x, y) olevalle varaukselle dQ on olemassa paikassa $(-x, -y)$ varaus $dQ \Rightarrow \rho$ -komponentti katoaa

$$\mathbf{E} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho_s \rho z d\rho d\phi}{4\pi\epsilon (\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s z}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + A^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + A^2}}$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

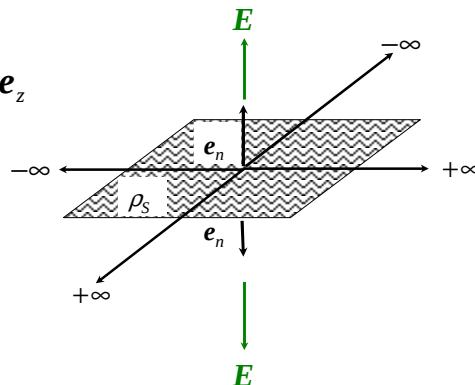
65 / 44

Varausjakaumat: ääretön tasovaraus

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s z}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s z}{4\pi\epsilon} * 2\pi * \left[\frac{-1}{\infty} - \frac{-1}{z} \right] \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{e}_n$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

66 / 44

SAH105 STAATTINEN KENTTÄTEORIA

3. SÄHKÖVUO JA GAUSSIN LAKI

Kokonaisvaraus Q

Kokonaisvaraus Q saadaan integroimalla varaustiheys ρ ko. viivan, pinta-alan tai tilavuuden ”yli”:

Viivavaraus: $dQ = \rho_l dl \Rightarrow Q = \int_l \rho_l dl$

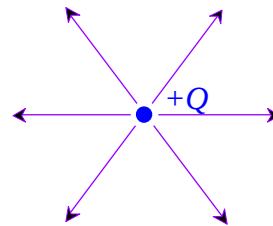
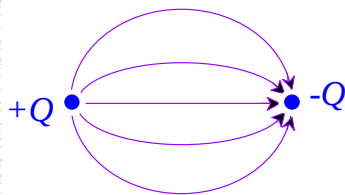
Tasovaraus: $dQ = \rho_s dS \Rightarrow Q = \int_s \rho_s dS$

Tilavuusvaraus: $dQ = \rho_v dV \Rightarrow Q = \int_v \rho_v dV$

Sähkövuo Ψ

Sähkövuo Ψ [C] lähtee positiivisesta varauksesta $+Q$ ja päättyy negatiiviseen varaukseen $-Q$ (tai äärettömyyteen)

$$\Psi = Q$$



12.01.2009

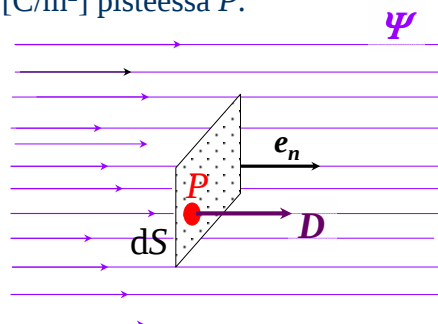
SATE.1060.01 / mv

69 / 44

Sähkövuon tiheys D

Jos pisteen P läheisyydessä vuoviivat ovat yksikkövektorin e_n suuntaisia ja jos vuo $d\Psi$ kulkee alan dS (ko. tason normaali e_n) läpi, niin sähkövuon tiheys D [C/m²] pisteessä P :

$$D = \frac{d\Psi}{dS} e_n$$



12.01.2009

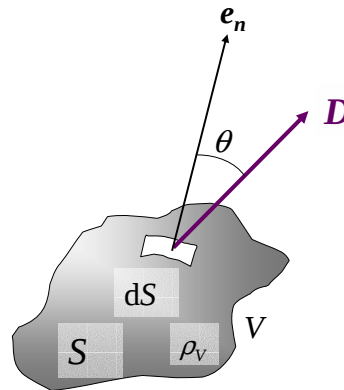
SATE.1060.01 / mv

70 / 44

Differentiaallinen sähkövuo $d\psi$

Alan dS läpäisevä diff. sähkövuo $d\psi$:

$$\begin{aligned} d\psi &= D dS \cos \theta \\ &= \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \mathbf{e}_n \\ &= \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$



Gaussin laki

Kuvaa suljetun pinnan sisällä olevien lähteiden ja pinnan läpi kulkevan vektorivuon välistä yhteyttä:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{enc}$$

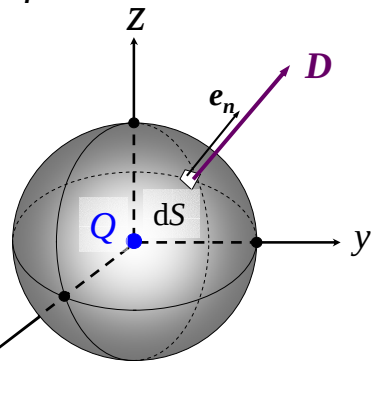
Gaussin laki: pistevaraus

$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint D \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} \mathbf{e}_r$$

$$= D \oint d\mathbf{S}$$

$$= D \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= Dr^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

73 / 44

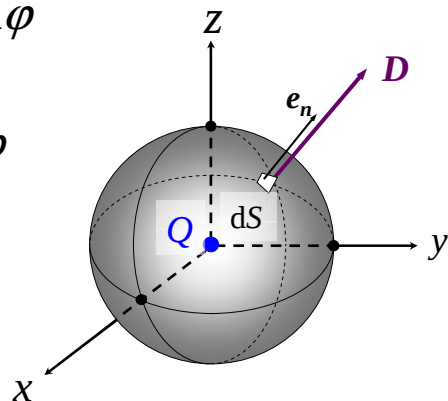
Gaussin laki: pistevaraus

$$Q = Dr^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= Dr^2 \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= Dr^2 (1+1) * 2\pi$$

$$= D(4\pi r^2)$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

74 / 44

Pistevarauksen aikaansaama sähkövuon tiheys ja sähkökentän voimakkuus

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_n = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

Gaussin ”pinta”

Vaatimukset:

- ♦ Pinnan on oltava suljettu
- ♦ Jokaisessa pinnan pisteessä sähkövuon $\mathbf{D}$ on oltava suunnaltaan ko. pinnalle normaali tai tangentialinen
- ♦ $\mathbf{D}$ on paikallisesti vakio osissa, joissa $\mathbf{D}$ on suunnaltaan normaali ko. pinnalle

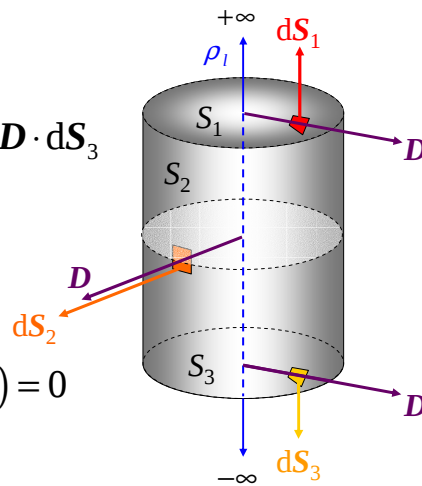
Gaussin "pinta"

$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}_2 + \int_{S_3} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}_3$$

$$\int_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{S_1} D \mathbf{e}_\rho \cdot dS_1 \mathbf{e}_z = 0$$

$$\int_{S_3} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}_3 = \int_{S_3} D \mathbf{e}_\rho \cdot dS_3 (-\mathbf{e}_z) = 0$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

77 / 44

Gaussin "pinta"

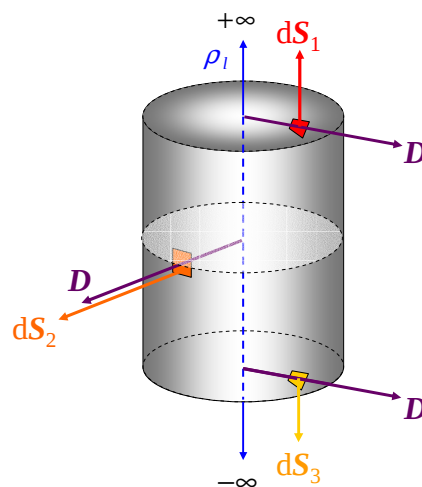
$$\int_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_2} D \mathbf{e}_\rho \cdot dS_2 \mathbf{e}_\rho$$

$$= \int_{S_2} D dS_2 = D \int_{S_2} dS_2$$

$$= D \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho d\phi dz$$

$$= D \rho \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\Rightarrow Q = D(2\pi\rho L)$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

78 / 44

SAH105 STAATTINEN KENTTÄTEORIA

4. DIVERGENSSI JA DIVERGENSSI TEOREEMA

Divergenssi

Jos vektorikentän divergenssi on positiivinen,
ko. alueella on olemassa lähteitä ($\Rightarrow +Q$).

Jos vektorikentän divergenssi on negatiivinen,
ko. alueella on olemassa nieluja ($\Rightarrow -Q$).

Jos vektorikentän divergenssi on nolla, ko.
alueella ei ole lähteitä eikä nieluja.

Vektorikentän divergenssi

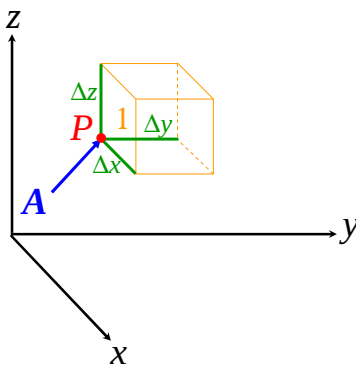
Vektorikentän $\mathbf{A}$ divergenssi pisteessä P :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

Vektorikentän divergenssi karteesisessa koordinaatistossa

Vektorikenttä $\mathbf{A}$ pisteessä P :

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$$

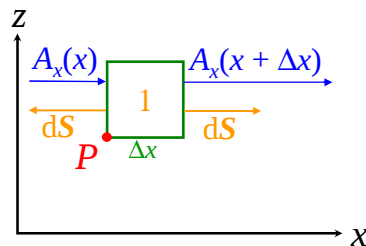


Vektorikentän divergenssi karteesisessa koordinaatistossa

$$\int_{\text{vasen}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx -A_x(x) \Delta y \Delta z$$

$$\int_{\text{oikea}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx A_x(x + \Delta x) \Delta y \Delta z \approx \left[A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z$$

$$\begin{aligned} & \int_{\text{vasen}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{oikea}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

83 / 44

Vektorikentän divergenssi karteesisessa koordinaatistossa

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

12.01.2009

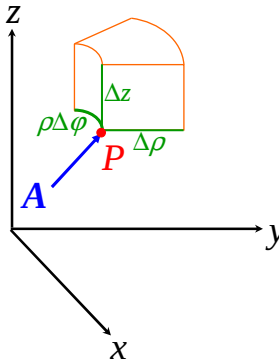
SATE.1060.01 / mv

84 / 44

Vektorikentän divergenssi sylinterikoordinaatistossa

Vektorikenttä $\mathbf{A}$ pisteessä P :

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$$



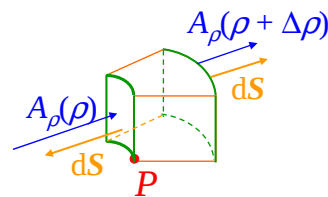
12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

85 / 44

Vektorikentän divergenssi sylinterikoordinaatistossa

$$\int_{\text{vasen}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx -A_\rho(\rho) \rho \Delta\varphi \Delta z$$



$$\begin{aligned} \int_{\text{oikea}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &\approx A_\rho(\rho + \Delta\rho)(\rho + \Delta\rho) \Delta\varphi \Delta z \\ &\approx \left[A_\rho(\rho) + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \Delta\rho \right] (\rho + \Delta\rho) \Delta\varphi \Delta z \end{aligned}$$

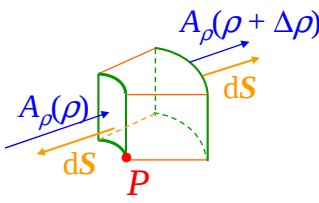
$$\approx A_\rho(\rho) \rho \Delta\varphi \Delta z + \left[A_\rho(\rho) + \rho \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right] \Delta\rho \Delta\varphi \Delta z$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

86 / 44

Vektorikentän divergenssi sylinterikoordinaatistossa

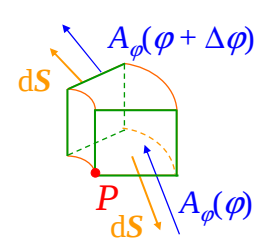
$$\begin{aligned}
 & \int_{\text{vasen}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{oikea}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\
 & \approx \left[A_\rho(\rho) + \rho \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right] \Delta \rho \Delta \phi \Delta z \\
 & \approx \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) \Delta \rho \Delta \phi \Delta z & \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} A_\rho(\rho) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} A_\rho \\
 & \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) \Delta v & \Delta v = \rho \Delta \rho \Delta \phi \Delta z
 \end{aligned}$$


12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

87 / 44

Vektorikentän divergenssi sylinterikoordinaatistossa

$$\begin{aligned}
 & \int_{\text{vasen}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx -A_\phi(\phi) \Delta \rho \Delta z \\
 & \int_{\text{oikea}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx A_\phi(\phi + \Delta \phi) \Delta \rho \Delta z \\
 & \approx \left[A_\phi(\phi) + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta \phi \right] \Delta \rho \Delta z
 \end{aligned}$$


12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

88 / 44

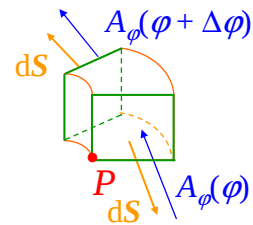
Vektorikentän divergenssi sylinterikoordinaatistossa

$$\int_{\text{vasen}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{oikea}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\approx \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta \phi \Delta \rho \Delta z$$

$$\approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta v$$

$$\Delta v = \rho \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

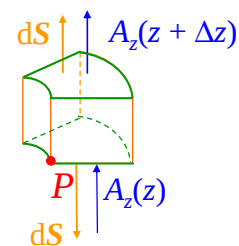
89 / 44

Vektorikentän divergenssi sylinterikoordinaatistossa

$$\int_{\text{vasen}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx -A_z(z) \rho \Delta \rho \Delta \phi$$

$$\int_{\text{oikea}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx A_z(z + \Delta z) \rho \Delta \rho \Delta \phi$$

$$\approx \left[A_z(z) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \right] \rho \Delta \rho \Delta \phi$$



12.01.2009

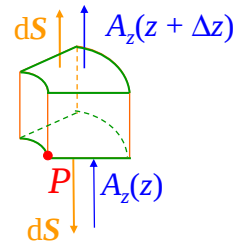
SATE.1060.01 / mv

90 / 44

Vektorikentän divergenssi sylinterikoordinaatistossa

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{vasen}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{oikea}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\
 \approx \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \rho \Delta \rho \Delta \varphi \\
 \approx \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta v
 \end{aligned}$$

$$\Delta v = \rho \Delta \rho \Delta \varphi \Delta z$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

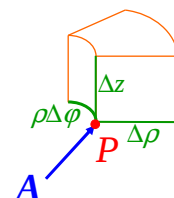
91 / 44

Vektorikentän divergenssi sylinterikoordinaatistossa

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta v$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

92 / 44

Vektorikentän divergenssi pallokoordinaatistossa

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Sähkövuon tiheyden divergenssi

Gaussin laista:

$$\frac{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{Q_{enc}}{\Delta V}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Q_{enc}}{\Delta V} = \rho$$

Maxwellin 1. yhtälö staattisille kentille:

Jos ε on vakio : $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Jos ε ei ole vakio : $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho$

$\mathbf{E}$ ja $\mathbf{D}$ -kenttien divergenssi on nolla kaikissa isotrooppisissa varauksettomissa kentissä.

Nabla ∇

Nabla karteesisessa
koordinaatistossa:

$$\nabla = \frac{\partial ()}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial ()}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial ()}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Nabla (yksinään) kuvaa osittaisderivaatan ottamista jokaisesta yksikkövektorista erikseen.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Kartesissa
koordinaatistossa:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{A} \end{aligned}$$

Divergenssiteoreema

Gaussin laista: $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_V dV = Q_{enc}$

Toisaalta: $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$

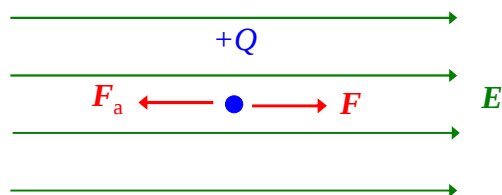
=> (Gaussin) divergenssiteoreema:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV$$

SAH105 STAATTINEN KENTTÄTEORIA

5. SÄHKÖSTAATTINEN KENTTÄ: TYÖ, ENERGIA JA POTENTIAALI

Varaus Q sähkökentässä E



Varaukseen Q vaikuttaa sähkökentässä E voima F :

$$F = QE$$

Jotta varaus Q pysyisi ”paikallaan”, on siihen vaikuttettava ”ulkoinen” voima F_a :

$$F_a = -QE$$

Työ W ja differentiaalinen työ dW

$$dW = \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{l} = -QE \cdot d\mathbf{l}$$

Jos varaus Q on positiivinen ja $d\mathbf{l}$ on $\mathbf{E}$:n suuntaan
 $\Rightarrow dW < 0$, eli ”sähkökenttä tekee työtä”.

Jos $dW > 0$, ”tehdään työtä sähkökenttää vastaan”.

Differentiaaliset etäisyysvektorit

Karteesinen koordinaatisto:

$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z$$

Sylinterikoordinaatisto:

$$d\mathbf{l} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi + dz\mathbf{e}_z$$

Pallokoordinaatisto:

$$d\mathbf{l} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

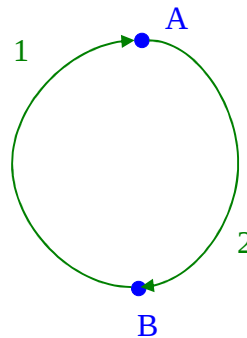
Konservatiivisuus

Staattisessa sähkökentässä tehty työ (siirrettäessä pistevaraus kohdasta B kohtaan A) on riippumaton käytetystä ”reitistä”.

$$\int_1 E \cdot d\mathbf{l} = - \int_2 E \cdot d\mathbf{l}$$

eli

$$\oint_{1-2} E \cdot d\mathbf{l} = 0$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

103 / 44

Pisteiden välinen potentiaali

Pisteen A potentiaali pisteeseen B verrattuna = työ, joka tehdään siirrettäessä positiivinen yksikkövaraus Q_u pisteestä B pisteeseen A

$$V_{AB} = \frac{W}{Q_u} = - \int_B^A E \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{J/C tai V})$$

Huom: Referenssipiste on viivaintegraalin alarajana.

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

104 / 44

Pistevarauksen Q potentiaali

Pistevarauksen Q aikaansaama sähkökenttä E on radiaalinen.

$$\begin{aligned} V_{AB} &= -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_B^A E_r \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} \mathbf{e}_r = -\int_B^A E_r dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{r_B}^{r_A} \frac{dr}{r^2} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_B}^{r_A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned}$$

Referenssipisteen B ollessa äärettömyydessä:

$$V_{A\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\infty} \right) \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$$

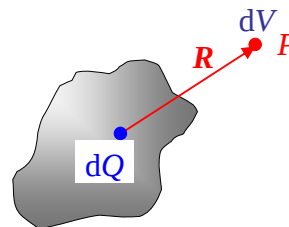
Varausjakauman ρ_V potentiaali

Differentiaalisen varauksen aikaansaama diff. potentiaali pisteessä P :

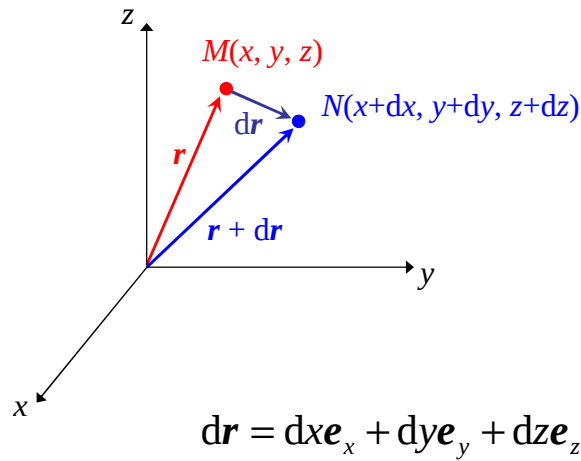
$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon R}$$

Kokonaispotentiaali pisteessä P :

$$V = \int_V \frac{dQ}{4\pi\epsilon R} = \int_V \frac{\rho_V dV}{4\pi\epsilon R}$$



Pisteiden (M ja N) välinen etäisyys:



Skalaarifunktio V

Funktion V muutos dV siirryttäessä pisteestä M pisteeseen N :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

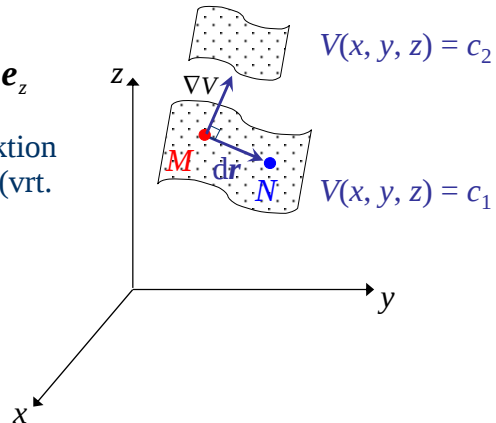
Gradientti ∇V

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Gradientti esittää skalaarifunktion muutosnopeutta avaruudessa (vrt. derivaatta)

Gradientin suunta:
funktion V max kasvusuunta

$$\Rightarrow dV = \nabla V \cdot d\mathbf{r}$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

109 / 44

Gradientti ∇V

Potentiaalifunktion gradientti on vektorikenttä, joka on kohtisuorassa vakio potentiaalipintaa vastaan

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{kartesinen koord.})$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial V}{\rho \partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{sylinterikoord.})$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial V}{r \partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial V}{r \sin \theta \partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{pallokoord.})$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

110 / 44

Sähkökentän voimakkuuden E ja potentiaalin V välinen yhteys

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{Toisaalta: } dV = \nabla V \cdot d\mathbf{r}$$

$$\text{Koska } d\mathbf{l} = d\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V$$

Sähkökentän E suunta on korkeammasta alempaan potentiaaliin.

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

111 / 44

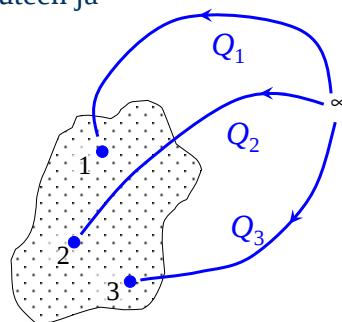
Staattisessa sähkökentässä oleva energia W_E

Tuotaessa varaus Q_1 paikkaan 1, on tarvittava työ nolla.

Tuotaessa varaus Q_2 paikkaan 2, tarvittava työ on verrannollinen varauksen 2 suuruuteen ja varauksen 1 potentiaaliin.

Kokonaistyö:

$$\begin{aligned} W_E &= W_1 + W_2 + W_3 \\ &= 0 + (Q_2 V_{2,1}) + (Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}) \end{aligned}$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

112 / 44

Staattiseen sähkökenttään varastoitunut energia W_E

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m V_m$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int \rho_V V dV$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dV$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int \frac{D^2}{\epsilon} dV$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

113 / 44

SAH105 STAATTINEN KENTTÄTEORIA

6. VIRTA, VIRTATIHEYD JA JOHTEET

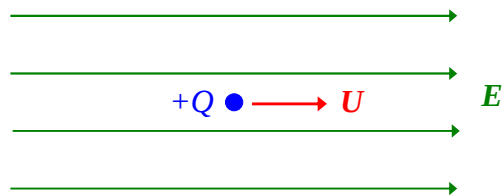
Sähkövirta I

= tietyn pisteen tai tietyn pinta-alan läpi kulkevan sähkövarauksen määrä aikayksikössä

Yksikkö $A = C/s$

Virtatiheys J (A/m^2)

Varaus Q tyhjössä



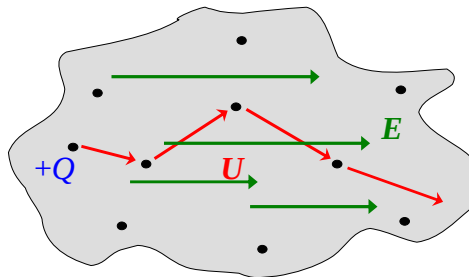
Tyhjössä olevassa sähkökentässä E varaukseen Q vaikuttava voima $F = QE$ saa aikaan vakiokiihtyvyyden

=> Varaus liikkuu E :n suuntaan kiihtyvällä nopeudella U .

Varaus Q nesteessä / kaasussa

Nesteessä tai kaasussa varaus Q törmäilee väliaineen hiukkasiin
 $\Rightarrow$ suunta vaihtuu satunnaisesti.

Vakio kentässä E ja
 homogeenisessa
 väliaineessa on
 keskimääräinen kentän
 suuntainen nopeus U
 (= kenttänopeus)



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

117 / 44

Liikkuvuus μ

Kenttänopeus U on suoraan verrannollinen
 kentänvoimakkuuteen E .

$$U = \mu E$$

μ = liikkuvuus (m^2/Vs)

- vaihtelee lämpötilan ja kappaleen kiderakenteen mukaan

12.01.2009

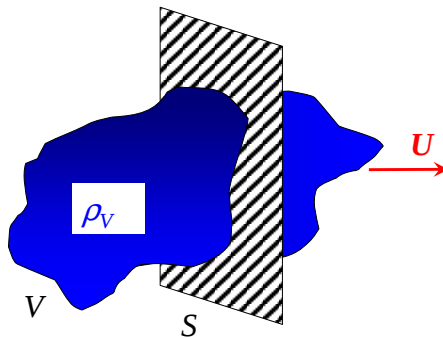
SATE.1060.01 / mv

118 / 44

Virtatiheys J

Tilavuusvaraustihentymä ρ_V liikkuu oikealle kenttänopeudella U .
Tihentymän kulkiessa pinta-alan S lävitse,
se aikaan saa konvektiovirran,
jonka virtatiheys on

$$J = \rho_V U$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

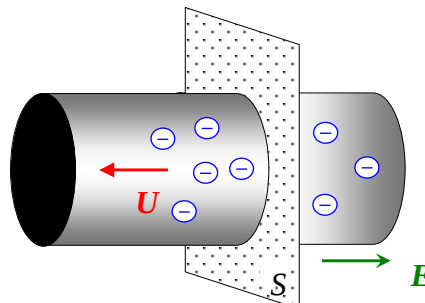
119 / 44

Johdinvirtatiheys J

Aiheutuu johtimen sisällä olevasta sähkökentästä:

$$J = \rho_V U \text{ ja } U = \mu E \\ \Rightarrow J = \sigma E$$

$$\sigma = \rho_V \mu \text{ (= johtavuus S/m)}$$



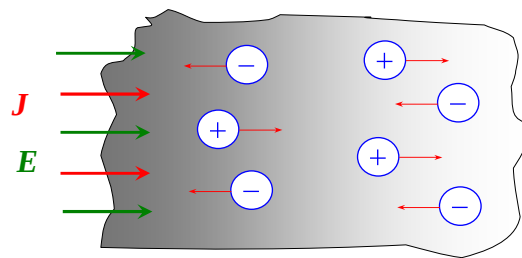
12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

120 / 44

Johtavuus σ nesteessä / kaasussa

Aiheuttajina positiiviset ja negatiiviset ionit:



$$\sigma = \rho_- \mu_- + \rho_+ \mu_+$$

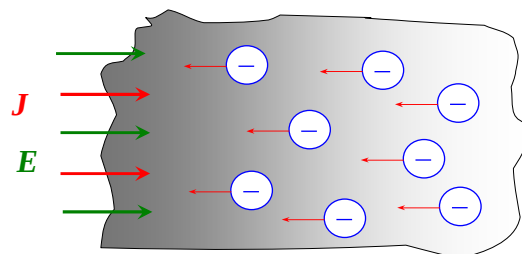
12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

121 / 44

Johtavuus σ johteissa

Aiheuttajina valenssielektronit:



$$\sigma = \rho_e \mu_e$$

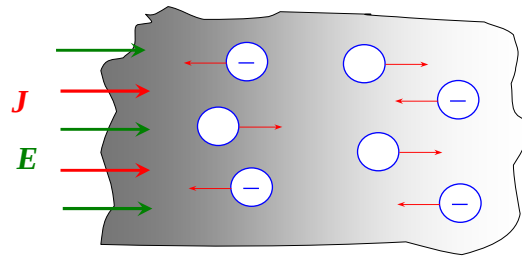
12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

122 / 44

Johtavuus σ puolijohteissa

Aiheuttajina elektroni-aukko -parit:



$$\sigma = \rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

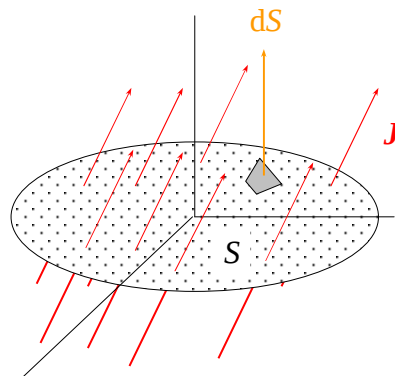
123 / 44

Virta I

Jos virrantiheys J kulkee pinta-alan S lävitse

$$dI = J \cdot dS$$

$$\Rightarrow I = \int_S J \cdot dS$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

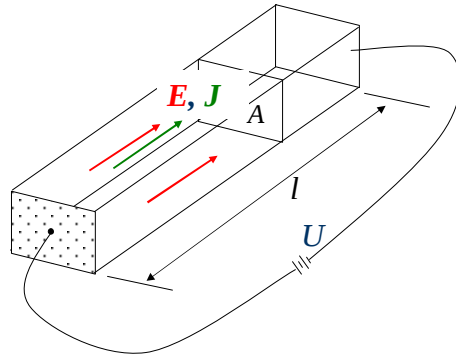
124 / 44

Kokonaisvirta I johtimessa

Kun vakiopoikkipintaiseen A pituudeltaan l olevan johtimen päiden välillä on jännite-ero U , niin

$$E = \frac{U}{l} \text{ ja } J = \frac{\sigma U}{l}$$

olettaen, että virta on tasaisesti jakautunut pinta-alalle A .



Johtimen resistanssi R virtatiheyden ollessa vakio

Em. tilanteessa kokonaisvirta:

$$I = JA = \frac{\sigma AU}{l}$$

Ohmin lain mukaisesti:

$$U = RI \Rightarrow R = \frac{l}{\sigma A} \quad (\Omega)$$

Johtimen resistanssi R virtatiheyden ollessa ei-vakio

Ohmin lain mukaisesti:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{U}{\int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

Jos vain sähkökentän voimakkuus on tiedossa:

$$R = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

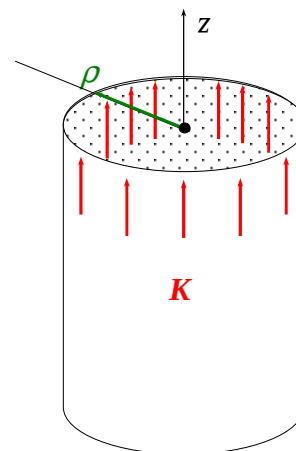
Virtatason virtatiheys K

Kun kokonaisvirta I kulkee suuntaan z sylinterinmuotoista (säde ρ) tasoa, niin jokaisessa ko. tason pisteessä

$$\mathbf{K} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_z$$

Yleisessä muodossa integroidaan $\mathbf{K}$:n normaalikomponenttia:

$$I = \int_C K_n dl$$



Virran jatkuvuusehto

Suljetulla pinnalla: $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho_v dV$

Jaetaan molemmat puolet ΔV :llä:

$$\frac{\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\int \rho_v dV}{\Delta V}$$

Kun $\Delta V \rightarrow 0$, niin $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

129 / 44

Johteen ja eristeen väliset rajapintaehdot

Sähkökenttä on konservatiivinen =>

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

130 / 44

Sähkökenttä ja vuontiheys johteessa

Staattisessa tilanteessa kaikki varaukset ovat johtimen ulkopinnalla

$$\Rightarrow \text{johtimen sisällä : } \rho = 0 \Rightarrow \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = 0$$

$$\Rightarrow \int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Annetaan etäisyyksien $2 \rightarrow 3$ ja $4 \rightarrow 1$ lähestyä nollaa:

$$\Rightarrow \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_4^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Sähkökentän ja vuontiheyden tangentialinen komponentti rajapinnassa

Sähkökenttä $\mathbf{E}$ on välillä $1 \rightarrow 2$ eristeen pinnalla tangentialinen:

$$\Rightarrow \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E_t \cdot dl = 0$$

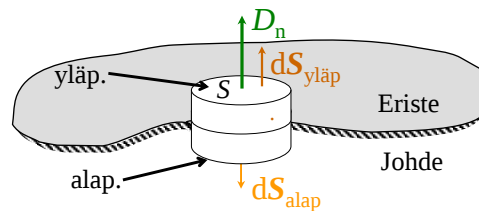
Joten: sähkökentän voimakkuuden ja sähkövuontiheyden tangentialinen komponentti johteen ja eristeen rajapinnassa on nolla: $\Rightarrow E_t = D_t = 0$

Gaussin lain sovellus rajapinnassa

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{yläp.}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{alap.}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{sivu}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$

Sähkövuon tiheyden tangentialinen komponentti on 0

$$\Rightarrow \int_{\text{sivu}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \int_{\text{yläp.}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{alap.}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

133 / 44

Gaussin lain sovellus rajapinnassa

Sähkövuon tiheys johteessa on 0

$$\Rightarrow \int_{\text{alap.}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \int_{\text{yläp.}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$

Sähkövuon tiheyden suunta ylälaipassa on tason pinnalle normaali:

$$\int_{\text{yläp.}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{yläp.}} D_n dS = \oint_A \rho_s dS$$

$$\Rightarrow D_n = \rho_s \Rightarrow E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon}$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

134 / 44

SAH105 STAATTINEN KENTTÄTEORIA

7. KAPASITANSSI JA ERISTEAINHEET

Atomin polarisoituminen

Sähkövuon tiheys D on eristeaineessa suurempi kuin tyhjiössä (E :n ollessa sama)

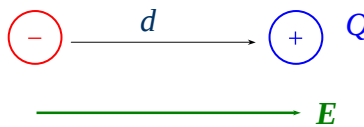
=> eristeaine polarisoituu sähkökentässä



Sähköinen dipolimomentti p

Positiivisen ja negatiivisen varausalueen siirtyminen vastakkaisiin suuntiin

=> Sähköinen dipolimomentti $p = Qd$



Polarisaatio P eristeessä

Polarisoituneella eristealueella ΔV on N kappaletta dipolimomentteja p

=> Polarisaatio P

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Np}{\Delta V} \quad (\text{C/m}^2)$$

Tällöin oletetaan, että dipolimomentit noudattavat jatkuvaa jakaumaa ko. tilavuudessa, mikä ei pidä paikkaansa.

Polarisaatio $\mathbf{P}$ makrotasolla

Makroskooppisella tasolla:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$\mathbf{E}$:n ja $\mathbf{P}$:n suunnat voivat erota toisistaan (tietyt kristalliset eristeaineet).

Polarisaatio $\mathbf{P}$ isotrooppisessa aineessa

Isotrooppisilla, lineaarisilla materiaaleilla $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{P}$ ovat samansuuntaiset kaikissa pisteissä:

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

missä χ_e = sähköinen susceptibiliteetti

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E},$$

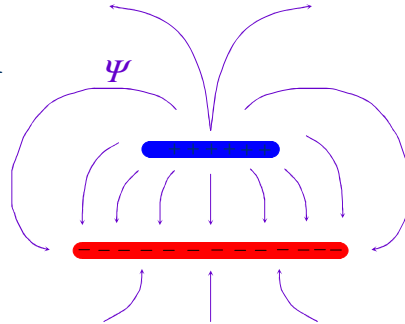
missä $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ suhteellinen permittiivisyys

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \text{ missä } \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

Kapasitanssi C

Kahden johtavan alueen, joiden välissä on tyhjä tai eristeainetta, välillä on kapasitanssi:

$$C = \frac{Q}{V} \text{ (F)}$$



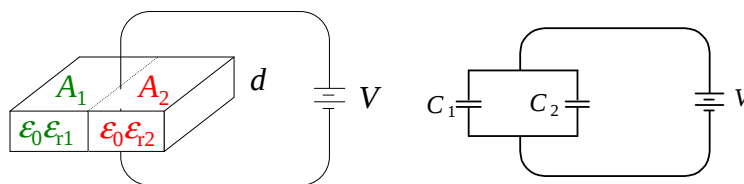
Kapasitanssin suuruus riippuu vain järjestelmän geometriasta ja eristeen ominaisuuksista.

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

141 / 44

Rinnankytketyt kapasitanssit



Kaksi kapasitanssiltaan erilaista eristeainetta on rinnakkain:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} A_1}{d} \text{ ja } C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} A_2}{d}$$

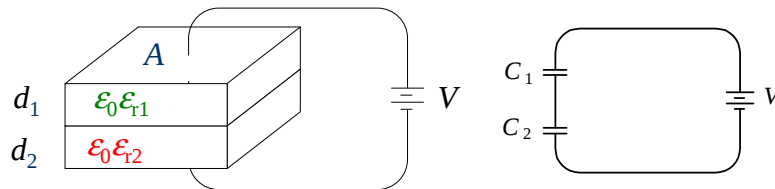
$$\Rightarrow C_{\text{kok}} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0}{d} (\epsilon_{r1} A_1 + \epsilon_{r2} A_2)$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

142 / 44

Sarjaankytketyt kapasitanssit



Kaksi kapasitanssiltaan erilaista eristainetta on peräkkäin:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} A}{d_1} \text{ ja } C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} A}{d_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{\text{kok}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{\epsilon_{r2} d_1 + \epsilon_{r1} d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} A}$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

143 / 44

Sähkökenttään varastoitunut energia

Sähkökenttään varastoitunut energia (integrointi johteiden välisessä tilavuudessa, hajavuota ei huomioida):

$$W_E = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dV$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow W_E = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \, dV$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

144 / 44

Kapasitanssiin varastoitunut energia

Kapasitanssiin varastoitunut energia (integraanti johteiden välisessä tilavuudessa, hajavuota ei huomioida):

$$W_E = \frac{1}{2} CV^2$$

Levykondensaattori vakio jännitteeseen kytkettynä

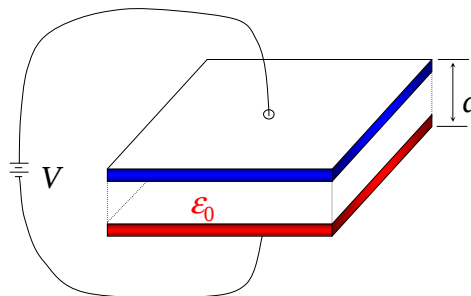
=> Levyjen välissä vakio E

$$E_0 = \frac{V}{d} \mathbf{e}_n \Rightarrow \mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 = \frac{\epsilon_0 V}{d} \mathbf{e}_n$$

Kun levyjen välissä olevan eristeen permittiivisyys ϵ_r :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \mathbf{D}_0$$



Levykondensaattorin levyillä vakio varaus

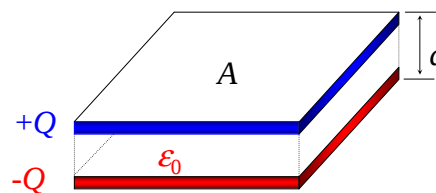
=> Levyjen välissä vakio D

$$D_0 = \frac{Q}{A} \mathbf{e}_n \Rightarrow E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} D_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \mathbf{e}_n$$

Kun levyjen välissä
olevan eristeen
permittiivisyys ϵ_r :

$$D = D_0$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

147 / 44

Rajapintaehdot kahden eristeaineen rajapinnalla

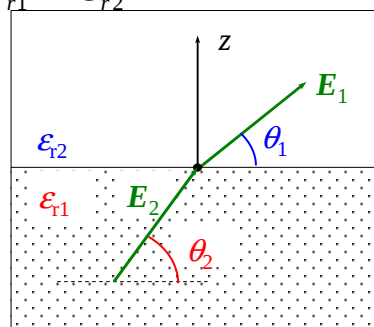
E :n tangentialinen komponentti on jatkuva eristeiden rajapinnassa:

$$E_{t1} = E_{t2} \Rightarrow \frac{D_{t1}}{\epsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_{r2}}$$

D :n normaalikomponentti on ko. rajapinnassa epäjatkuva ($|\rho_s|$:n suuruuden verran):

$$D_{n1} - D_{n2} = -\rho_s$$

$$\epsilon_{r1} E_{n1} - \epsilon_{r2} E_{n2} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

148 / 44

Rajapintaehdot kahden eristeaineen rajapinnalla

Tavallisesti eristeaineiden välisessä rajapinnassa ei ole varauksia, joten rajapintaehdot tulevat olemaan:

$$E_{t1} = E_{t2} \Rightarrow \frac{D_{t1}}{\epsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_{r2}}$$

$$D_{n1} = D_{n2} \Rightarrow \epsilon_{r1} E_{n1} = \epsilon_{r2} E_{n2}$$

SAH105 STAATTINEN KENTTÄTEORIA

8. LAPLACEN YHTÄLÖ

Johdanto

Sähkökentän voimakkuuden määrittäminen on vaikeaa

- integroimalla varausjakaumia tai Gaussin lain perusteella, koska yleensä varausjakaumaa ei tunneta
- potentiaalifunktion gradientin kautta, koska yleensä potentiaalifunktiota ei tiedetä koko alueella

Poissonin yhtälö

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \Rightarrow \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho$$

$$-\nabla V = \mathbf{E} \Rightarrow \nabla \cdot \epsilon (-\nabla V) = \rho$$

Homogeenisessa väliaineessa:

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Laplacen yhtälö

Homogeenisessa varauksettomassa väliaineessa:

$$\nabla^2 V = 0$$

Laplacen yhtälö karteesisessa koordinaatistossa

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Laplacen yhtälö sylinterikoordinaatistossa

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Laplacen yhtälö pallokoordinaatistossa

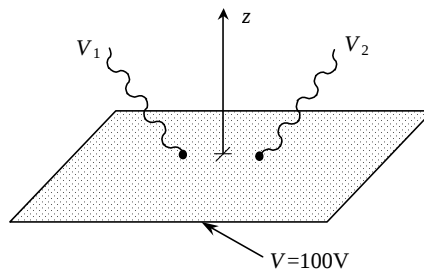
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

”Ainoalaatuisuus”

Sähköstaattisella probleemalla on vain yksi ratkaisu



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

157 / 44

Keskiarvoteoreema

Varauksettomassa alueessa:

Ympyrän tai pallon keskipisteessä potentiaali V on keskiarvo kaikista ko. alueella olevista arvoista

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

158 / 44

Maksimiarvoteoreema

Varauksettomassa alueessa:

Potentiaalilla V ei voi olla maksimi- tai minimiarvoa ko. alueessa.

=> Potentiaalın V maksimiarvo on alueen rajapinnassa

Yksi muuttuja karteesisessa koordinaatistossa

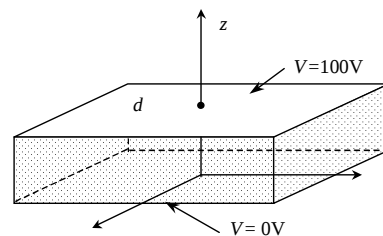
Levyjen välissä oleva tila on varaukseton.

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Hajavuota ei huomioida.

Potentiaali on vain z :n funktio.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$



Integroinnit

Integroidaan kahteen kertaan:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \xRightarrow{1. \text{ integr.}} \frac{\partial V}{\partial z} = A$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = A \xRightarrow{2. \text{ integr.}} V = Az + B$$

Rajaehdot

Käytetään apuna yhtälön kertoimien ratkaisussa rajaehdoja:

$$V = 0, \text{ kun } z = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$V = 100, \text{ kun } z = d \Rightarrow A = \frac{100}{d}$$

$$\Rightarrow V = 100 \left(\frac{z}{d} \right) \text{ (V)}$$

Sähkökentän voimakkuus

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)$$

$$\text{Nyt } \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(100\frac{z}{d}\right)\mathbf{e}_z = -\frac{100}{d}\mathbf{e}_z \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{D} = -\frac{\epsilon 100}{d}\mathbf{e}_z \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right)$$

Varaustiheys johdelevyillä

$$\rho_s = D_n = \pm \frac{\epsilon 100}{d} \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right)$$

$$z = d \Rightarrow + \text{ ja } z = 0 \Rightarrow -$$

SAH105 STAATTINEN KENTTÄTEORIA

9. AMPÈREN LAKI JA MAGNEETTIKENTTÄ

Staattinen magneettikenttä

Staattisen magneettikentän saa aikaiseksi

1. vakiovirta
2. kestopagneetti

Magneettivuon tiheys B

- yksikkö $\left[T = \frac{Vs}{m^2} \right]$
- kuvaa avaruuteen jakautunutta magneettista voimaa, joka saa sähkövirran muuttamaan suuntaansa

Magneettikentän voimakkuus H

- yksikkö $\left[\frac{A}{m} \right]$
- $$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \text{ (lineaariselle väliaineelle)}$$

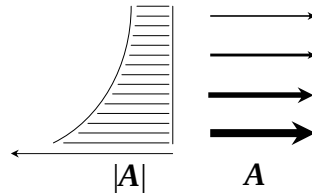
$$\mu = \mu_0 \mu_r = \text{permeabiliteetti}$$

$$\text{tyhjän permeabiliteetti } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$
- voidaan käsittää matemaattiseksi apusuureeksi
- E :n ja H :n välillä symmetria (dualismi)

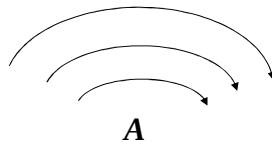
Vektorikentän $\mathbf{A}$ roottori

mittaa vektorifunktion pyörteisyyttä

1. vektorifunktion muuttuminen omaa suuntaansa vastaan kohtisuorassa suunnassa



2. suunnan kaartuminen



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

169 / 44

Roottori yleisessä muodossa

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_x & h_2 \mathbf{e}_y & h_3 \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_1 A_x & h_2 A_y & h_3 A_z \end{vmatrix}$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

170 / 44

Roottori karteesisessa koordinaatistossa

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

171 / 44

Roottori sylinterikoordinaatistossa

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\rho \partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

172 / 44

Roottori pallokoordinaatistossa

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (rA_\varphi) \right) \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

173 / 44

Roottorin ominaisuuksia

1. Kaikille vektorikentille $\mathbf{A}$: Roottorin divergenssi on nolla (skalaari)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

2. Kaikille skalaarifunktioille f : Gradientin roottori on nolla (vektori)

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

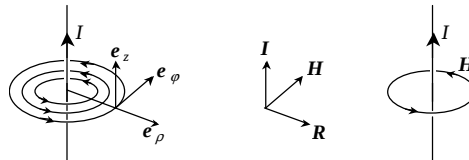
12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

174 / 44

Biot'n ja Savartin laki

Suoran pitkän virtajohtimen magneettikentän laki:



1. Kentän suunta saadaan oikeankäden säännön mukaisesti
2. Kentän voimakkuus on verrannollinen virtaan I ja kääntäen verrannollinen etäisyyteen R

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

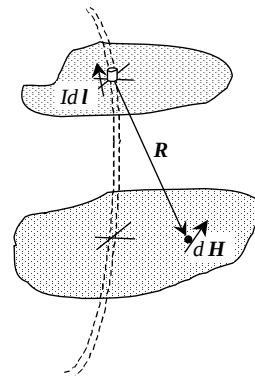
175 / 44

Biot'n ja Savartin laki

Yleisessä muodossa:

$$d\mathbf{H} = \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R}{4\pi R^2} \quad [\text{A/m}]$$

$$\mathbf{H} = \oint \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{e}_R}{4\pi R^2} \quad [\text{A/m}]$$



12.01.2009

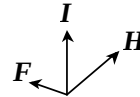
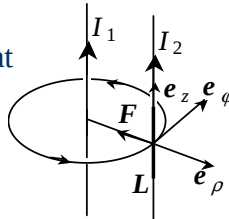
SATE.1060.01 / mv

176 / 44

Ampèren laki

Kahden samansuuntaisen suoran virtajohtimen välisen voiman laki:

1. Yhden suuntaiset suorat virtajohtimet vetävät toisiaan, jos virrat ovat samansuuntaiset



2. Johtimen osaan vaikuttava voima F on verrannollinen osan pituuteen L ja kumpaankin virtaan I_1 ja I_2 sekä kääntäen verrannollinen johdinten välimatkaan R

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

177 / 44

Ampèren laki

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{alue}}$$

Suljettu viivaintegraali magneettikentän voimakkuuden tangentialisesta komponentista

=

kokonaisvirta ko. viivaintegraalin sisään jäävässä alueessa

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

178 / 44

Ampèren lain sovelluksen ehdot

1. Kunkin pisteen suljetulla reitillä $\mathbf{H}$ tulee olla joko tangentialinen tai normaali reitille
2. $\mathbf{H}$ on yhtä suuri jokaisessa reitin pisteessä, missä $\mathbf{H}$ on tangentialinen

Magneettikentän voimakkuuden $\mathbf{H}$ roottori

Ampèren lain mukaisesti:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_x &= \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{I_x}{\Delta y \Delta z} = J_x = \frac{dI_x}{dS} \\
 (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_y &= \lim_{\Delta x \Delta z \rightarrow 0} \frac{I_y}{\Delta x \Delta z} = J_y = \frac{dI_y}{dS} \\
 (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_z &= \lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{I_z}{\Delta x \Delta y} = J_z = \frac{dI_z}{dS}
 \end{aligned}
 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Magneettivuo Φ (Wb)

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Gaussin laki magneettivuolle:

Suljetun pinnan läpi ulos tuleva magneettivuo on nolla.

$$\Phi = 0$$

Magneettivuo on jatkuva.

Magneettikentän vektoripotentiali $\mathbf{A}$ (Wb/m)

Staattinen magneettikenttä on aina roottorikenttä:

On olemassa vektorikenttä $\mathbf{A}$, jonka pyörteisyys on kentän magneettivuon tiheys $\mathbf{B}$:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Jos vektoripotentiali halutaan määrittää alueella olevan virran perusteella, tarvitaan lisäehto:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Vektoripotentiaalit perusvirtajakaumille

$$\text{Virtalanka: } \mathbf{A} = \oint \frac{\mu I d\mathbf{l}}{4\pi R}$$

$$\text{Virtataso: } \mathbf{A} = \int_S \frac{\mu \mathbf{K} d\mathbf{S}}{4\pi R}$$

$$\text{Virtatiheys: } \mathbf{A} = \int_V \frac{\mu \mathbf{J} dV}{4\pi R}$$

R on etäisyys virtaelementistä pisteeseen, jossa vektoripotentiaalia ollaan määrittämässä.

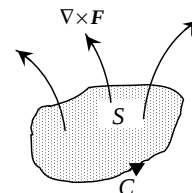
Stokesin lause

Suljetulla reitillä C olevat vektorikentän $\mathbf{F}$ tangentialiset komponentit
 = alueen S läpi kulkevat vektorikentän $\mathbf{F}$ roottorin normaalikomponentit

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

Magneettikentille:

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$$



SAH105 STAATTINEN KENTTÄTEORIA

10. MAGNEETTIKENTÄSSÄ VAIKUTTAVAT VOIMAT JA VÄÄNTÖMOMENTIT

Lorenzin voimalaki

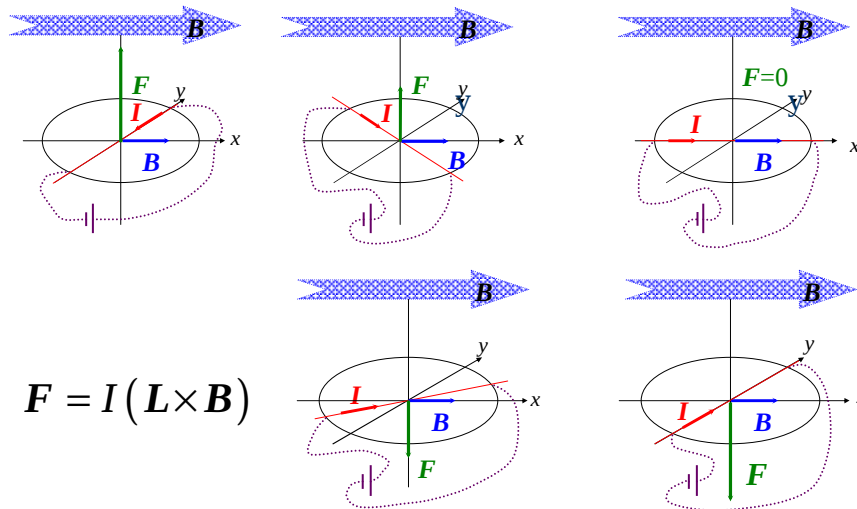
Määrittää sähköiseen liikkuvaan varaukseen kohdistuvan sähköisen ja magneettisen voiman:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B})$$

Kun kyseessä on jatkuva sähkövirta, saadaan pelkäksi magneettiseksi voimalaiksi:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Magneettisen voiman riippuvuus virran suunnasta



$$\mathbf{F} = I (\mathbf{L} \times \mathbf{B})$$

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

187 / 44

Työ

Magneettikenttä aiheuttaa virralliseen johtimeen Lorentzin lain mukaisen voiman $\mathbf{F}$. Jotta virrallinen johdin pysyy paikallaan, on siihen vaikuttettava em. voimalle vastakkainen voima $\mathbf{F}_a$.

Työ, joka joudutaan tekemään liikuttaessa virrallista johdinta magneettikentässä:

$$W = \int_{\text{alku}}^{\text{loppu}} \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{l}$$

12.01.2009

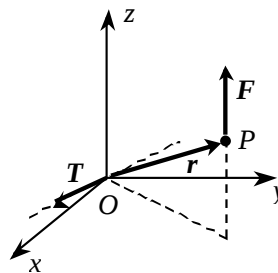
SATE.1060.01 / mv

188 / 44

Vääntömomentti T (N/m)

Tiettyssä pisteessä vaikuttava vääntömomentti saadaan ko. pisteestä lähtevän voiman varren ja voiman ristitulosta:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

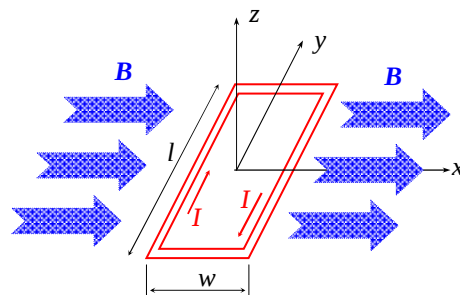
189 / 44

Virtasilmutka esimerkki: voima

Olkoon yksikierröksinen kela tasolla $z = 0$.
Vain $\pm y$ -suuntaan oleva virta aikaansaa voimavaikutuksen:

$$\mathbf{F}_{vasen} = I(l\mathbf{e}_y \times B\mathbf{e}_x)$$

$$\mathbf{F}_{oikea} = I(l(-\mathbf{e}_y) \times B\mathbf{e}_x)$$



12.01.2009

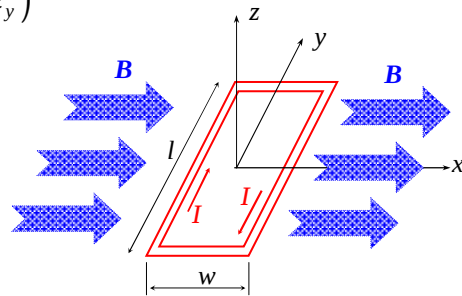
SATE.1060.01 / mv

190 / 44

Virtasilmukka esimerkki: vääntömomentti

$$T = \frac{w}{2}(-\mathbf{e}_x) \times B l (-\mathbf{e}_z) + \frac{w}{2}\mathbf{e}_x \times B l \mathbf{e}_z$$

$$= 2B l \frac{w}{2}(-\mathbf{e}_y) = B I A(-\mathbf{e}_y)$$



12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

191 / 44

Magneettimomentti $\mathbf{m}$

Magneettimomentti virtasilmukalle:

$$\mathbf{m} = I A \mathbf{e}_n$$

jossa yksikkönormaalivektori $\mathbf{e}_n$ saadaan oikean käden – säännön mukaisesti .

$$\Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Eli: Alueessa, jossa vaikuttaa magneettikenttä $\mathbf{B}$, on olemassa vääntömomentti $\mathbf{T}$, joka pyrkii kääntämään virtasilmukkaa sellaiseen asentoon, jossa $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{B}$ ovat samaan suuntaan (jolloin vääntömomentti menee nolaksi)

12.01.2009

SATE.1060.01 / mv

192 / 44