



Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

SATE2180
Kenttäteorian perusteet
Siirrosvirta
Sähkötekniikka/MV

Staattiset sähkö- ja magneettikentät

Differentiaalimuoto	Integraalimuoto	Nimitys
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	Faradayn laki
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	Ampèren laki
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$	Gaussin laki
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	Magn. kenttä lähteetön

Staattinen v. dynaaminen kenttä

- Staattinen = ajan suhteen muuttumaton kenttä
 - sähköstatiikka käsittää vain sähkövarauksia ja sähkökenttiä
 - magnetostatiikka käsittää vain magneettivarauksia tai sähkövirtoja (vakio tasavirta)
- ◆ Dynaaminen = ajan mukana muuttuva kenttä
 - mitä nopeammin sähkökenttä vaihtelee ajan suhteen, sitä voimakkaamman magneettikentän se synnyttää; ja päinvastoin

Dynaamiset sähkö- ja magneettikentät

Differentiaalimuoto	Integraalimuoto	Nimitys
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$	Faradayn laki
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$	Ampèren laki
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$	Gaussin laki
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	Magn. kenttä lähteetön

Ampèren lain siirrosvirta

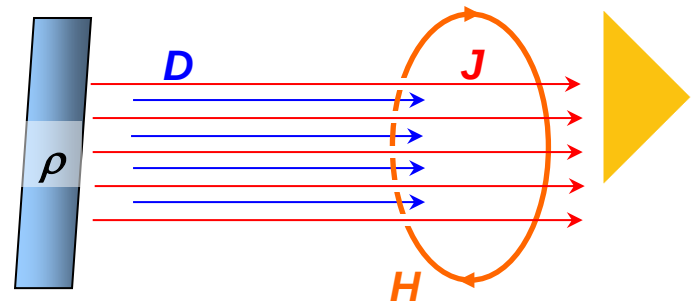
Sähkövaraus aiheuttaa sähkövuon

Sähkövirran jatkuvuuslaki: $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Sähkövuon muutostermi = sähköinen siirrosvirta

Ampéren laki:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$



Varauksien häviämättömyyden laki

Todistus Gaussin integrointilausetta käyttäen:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = -\frac{\partial}{\partial t} Q$$

Eli: pinnan S läpi ulos tuleva kokonaisvirta I vastaa sisäpuolisen tilavuuden kokonaisvarauksen Q pienenemistä.

- Virta muodostuu varauksien liikkeestä
- Varaukset eivät synny tyhjästä eivätkä häviä

Esimerkki: levykondensaattori

Sekä pinta-alaa S_1 että S_2 rajoittaa äärioviiva C .

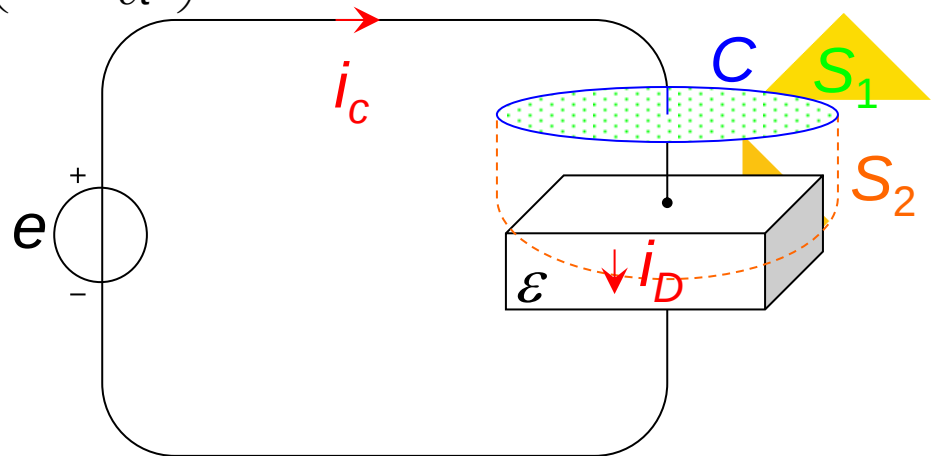
$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S (\nabla \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}_2) \cdot d\mathbf{S}_2 \\ &= \int_S \left(\mathbf{J}_1 + \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_S \left(\mathbf{J}_2 + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}_2\end{aligned}$$

Levyjen ulkopuolella $\mathbf{D} = 0$.

Levyjen välissä $\mathbf{J} = 0$.

$$\Rightarrow \int_S \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_2$$

$$\Rightarrow i_c = i_D$$



Esimerkki: levykondensaattori

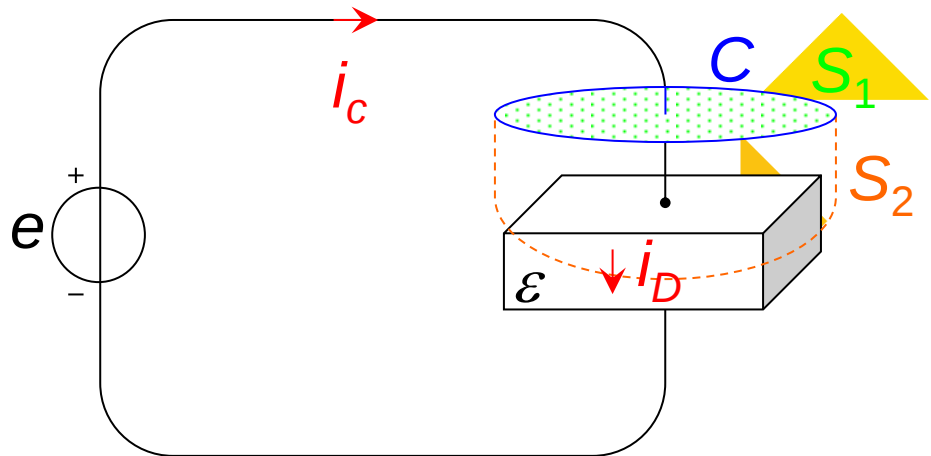
Piirianalyysiä soveltaen:

Kondensaattorin kapasitanssi: $C = \frac{\varepsilon A}{d}$

Jännitelähteen antama virta: $i_c = C \frac{de}{dt} = \frac{\varepsilon A}{d} \frac{de}{dt}$

Levyjen välissä: $D = \varepsilon E = \varepsilon \frac{e}{d}; \quad \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{d} \frac{de}{dt}$

$$\begin{aligned} i_D &= \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_S \frac{\varepsilon}{d} \frac{de}{dt} dS = \frac{\varepsilon A}{d} \frac{de}{dt} = i_c \end{aligned}$$



Siirros- ja johdevirran suhde materiaaleissa

Ideaalihohteissa: $i = i_c$ ja $i_D = 0$.

Ideaalieristeessä: $i = i_D$ ja $i_c = 0$.

Jos kyseessä 'huono' johde tai eriste:

$$\mathbf{J}_{\text{kok}} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \mathbf{E})$$

$$\mathbf{E} = E e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j\omega E e^{j\omega t} = j\omega \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_{\text{kok}} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \varepsilon \mathbf{E}$$

Joten:

$$\frac{J_c}{J_D} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}$$



Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA