



Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

SATE2180

Kenttäteorian perusteet

Faradayn laki ja
sähkömagneettinen induktio
Sähkötekniikka/MV

Faradayn laki

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Muuttuva magneettivuon tiheys $\mathbf{B}$ aiheuttaa ympärilleen sähkökentän $\mathbf{E}$ pyörteen.

Sähkökentän voimakkuutta $\mathbf{E}$ ei voi esittää skalaaripotentialin V gradienttina alueessa, jossa on muuttuva magneettivuon tiheys $\mathbf{B}$.

Soveltamalla Stokesin integraalilauseetta yhtälö saadaan muotoon:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Ajan mukaan muuttuvassa magneettikentässä oleva liikkumaton piiri

Jos piiri pysyy paikallaan alueessa S , yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Määritellään ääriviivalla C olevaan piiriin indusoitunut sähkömotorinen voima U_{smv} :

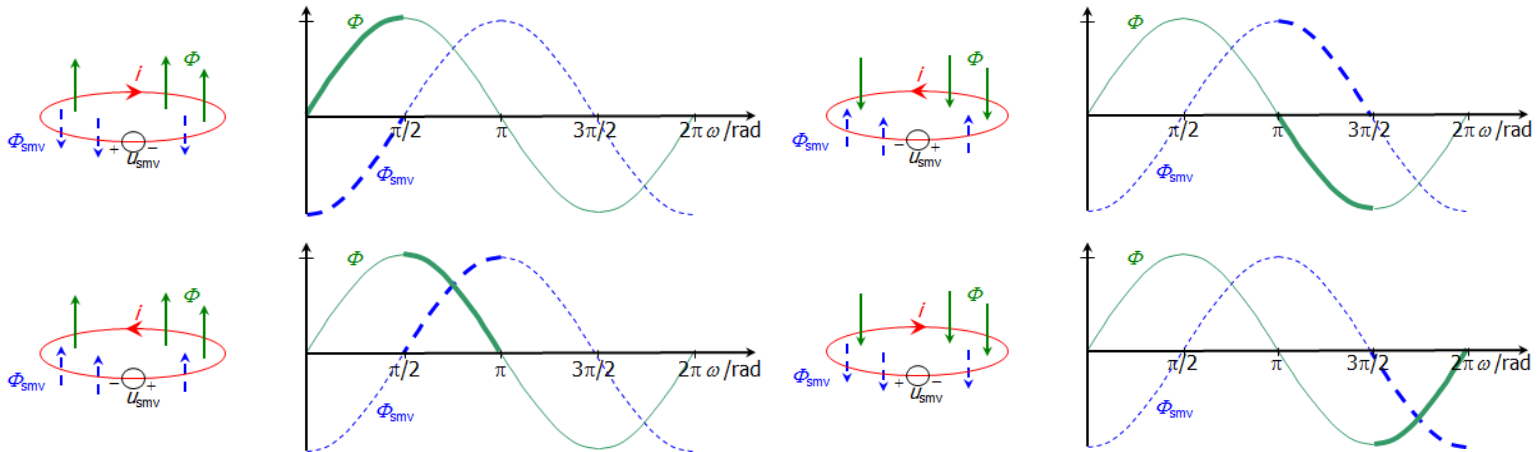
$$U_{\text{smv}} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Ja alueen S läpi kulkeva magneettivuo Φ : $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

$$\Rightarrow U_{\text{smv}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Lenzin laki

Suljettuun piiriin indusoituu sähkömotorinen voima U_{smv} , joka aiheuttaa silmukan läpi kulkevan magneettivuon Φ muutokselle vastakkaisen magneettivuon Φ_{smv} .



Staattisessa magneettikentässä liikkuva johdin

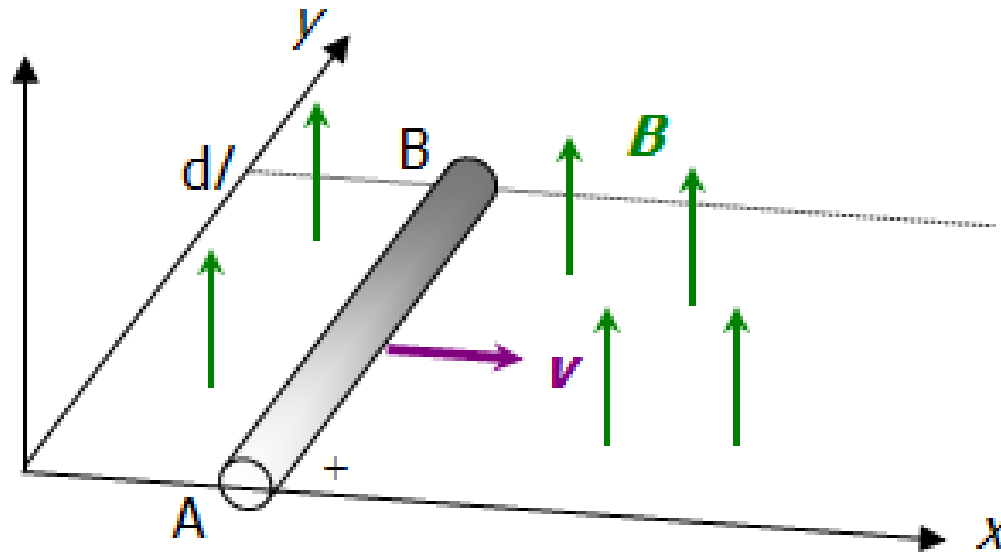
Kun johdin liikkuu nopeudella $\mathbf{v}$ staattisessa (ajan mukaan muuttumattomassa) magneettikentässä $\mathbf{B}$, niin voima

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

aiheuttaa sen, että johtimessa vapaasti liikkuvat elektronit siirtyvät johtimen toiseen päähän, jättäen johtimen toisen pään positiiviseksi varautuneeksi.

Varausten erkautuminen jatkuu, kunnes sähköiset ja magneettiset voimat tasapainottavat toisensa.

Liikkuva johdin staattisessa magneettikentässä



Liikkeestä johtuva sähkömotorinen voima

Jos liikkuva johdin on osa suljettua piiriä C, piiriin muodostuu sähkömotorinen voima

$$U_{\text{smv}} = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

jota kutsutaan

- vuon leikkaavaksi tai
- liikkeestä johtuvaksi

sähkömotoriseksi voimaksi



Liikkuva johdin ajan mukaan muuttuvassa magneettikentässä (1 / 2)

Kun varaus q johdin liikkuu nopeudella $\mathbf{v}$ alueessa, jossa on olemassa sekä sähkökenttä $\mathbf{E}$ että magneettikenttä $\mathbf{B}$, varaukseen q vaikuttaa Lorenzin yhtälön mukaisesti voima

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Jos ajatellaan havainnoitsijan liikkuvan samalla nopeudella samaan suuntaan varauksen q kanssa, ei ole olemassa näennäistä liikettä ja varaukseen q vaikuttava voima voidaan tulkita aiheutuvan sähkökentästä $\mathbf{E}'$.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ tai}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Liikkuva johdin ajan mukaan muuttuvassa magneettikentässä (2 / 2)

Jos johtava piiri C ja pinta-ala S liikkuvat nopeudella $\mathbf{v}$ kentässä $(\mathbf{E}', \mathbf{B})$ piiriin muodostuva kokonaissähkömotorinen voima:

$$U_{\text{smvkok}} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

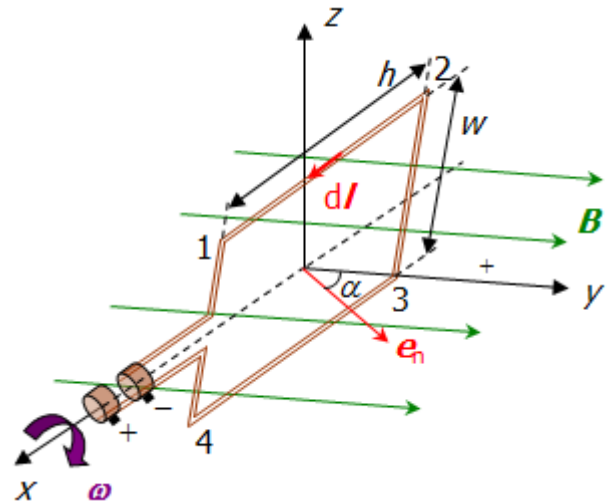
Suorakaiteen muotoinen johdinsilmukka ajan mukaan muuttuvassa magneettikentässä

Suorakaiteen muotoinen (korkeus h , leveys w) johdinsilmukka on sijoitettu muuttuvaan magneettikenttään

Silmukan muodostamalle tasolle kohtisuora normaali $\mathbf{e}_n$ muodostaa kulman α y -akselin suuntaisen yksikkövektorin $\mathbf{e}_y$ kanssa.

Määritä silmukkaan indusoitunut sähkömotorinen voima, kun

- a) silmukka on levossa
- b) silmukka pyörii x -akselin ympäri kulmanopeudella ω



Silmukka levossa

Kun silmukka on levossa, silmukan läpi kulkeva magneettivuo Φ voidaan ratkaista yhtälöllä

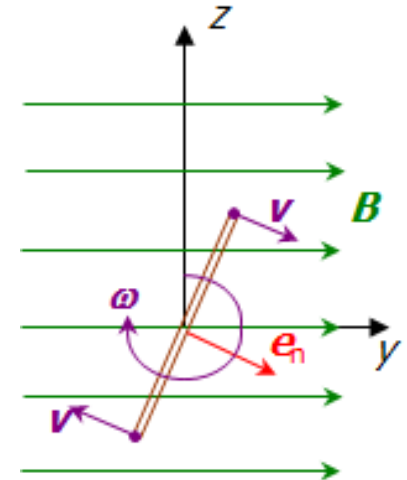
$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^w \int_0^h B_0 \sin \omega t \mathbf{e}_y \cdot dx dy \mathbf{e}_n = B_0 h w \sin \omega t \cos \alpha$$

Tällöin silmukkaan indusoituva sähkömotorinen voima on

$$U_{\text{asmv}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 S \omega \cos \omega t \cos \alpha$$

Missä $S = hw$ on silmukan pinta-ala

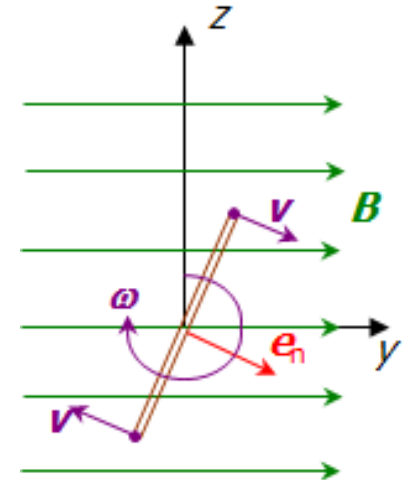
Esimerkkitilanteessa silmukan päässä 1 on matalampi potentiaali kuin silmukan päässä 4, eli jos silmukka on kytketty ulkoiseen kuormaan, virta tulee kiertämään silmukassa ”vastapäivään”.



Silmukka pyörii x-akselin ympäri

Kun silmukka pyörii x-akselin ympäri, silmukkaan muodostuva pyörimisliikkeen aiheuttama sähkömotorisen voiman muutos ratkaistaan yhtälöllä

$$\begin{aligned}U_{\text{bsmv}} &= \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\&= \int_2^1 \left(\left(\frac{W}{2} \omega \mathbf{e}_n \right) \times (B_0 \sin \omega t \mathbf{e}_y) \right) \cdot (dx \mathbf{e}_x) + \\&\quad \int_4^3 \left(\left(-\frac{W}{2} \omega \mathbf{e}_n \right) \times (B_0 \sin \omega t \mathbf{e}_y) \right) \cdot (dx \mathbf{e}_x) \\&= 2 \left(\frac{W}{2} \omega B_0 \sin \omega t \sin \alpha \right) h\end{aligned}$$



Silmukka pyörii x-akselin ympäri

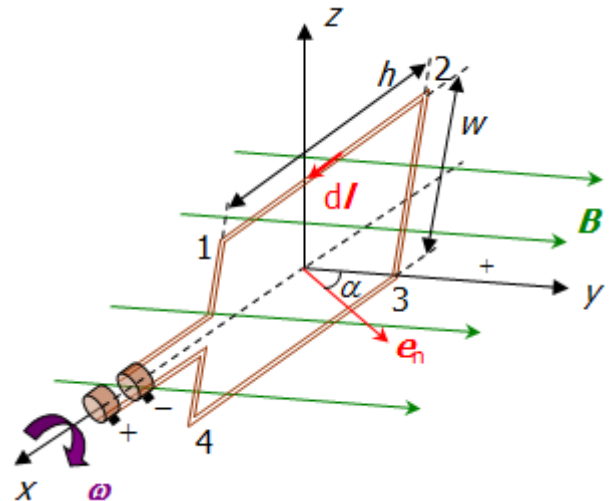
Silmukan sivuihin 2 $\rightarrow$ 3 ja 4 $\rightarrow$ 1 ei indusoidu sähkömotorista voimaa, koska sivuilla ei ole $\mathbf{e}_x$ suuntaista komponenttia.

Jos kulma $\alpha = 0$ ajanhetkellä $t = 0$, niin $\alpha = \omega t$ ja

$$U_{\text{bsmv}} = B_0 S \omega \sin \omega t \sin \omega t$$

Silmukkaan muodostuva kokonaissähkömotorinen voima koostuu muuttuvan magneettikentän ja silmukan liikkeen yhteisvaikutuksesta

$$\begin{aligned} U_{\text{smv}} &= U_{\text{asmv}} + U_{\text{bsmv}} \\ &= -B_0 S \omega (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) \\ &= -B_0 S \omega \cos 2\omega t \end{aligned}$$



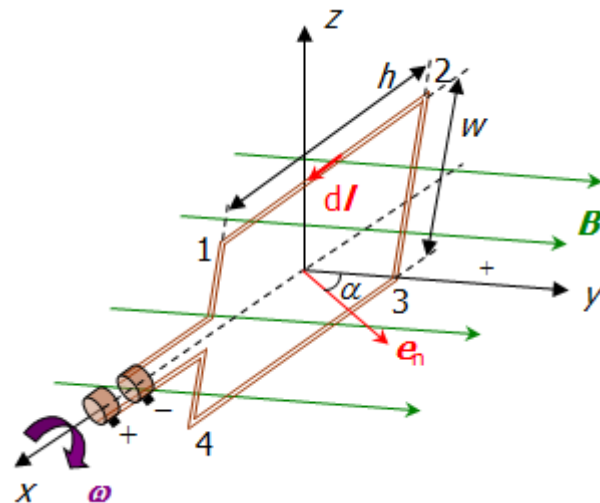
Ratkaisutapa 2

Silmukkaan muodostuva kokonaissähkömotorinen voima voidaan määrittää myös suoraan määrittämällä ensin silmukan läpi kunakin ajanhetkenä kulkeva kokonaisvuo

$$\Phi(t) = \mathbf{B}(t) \cdot (\mathbf{S} \mathbf{e}_n(t)) = B_0 S \sin \omega t \cos \alpha$$

Ja sen jälkeen määrittämällä sähkömotorinen voima

$$\begin{aligned} U_{\text{smv}} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} B_0 S \sin 2\omega t \right) \\ &= -B_0 S \omega \cos 2\omega t \end{aligned}$$





Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA