

4 MATRIISIT JA MATRIISILASKUT

Ch:Matrix

4.1 Matriisi ja matriisilaskut

Sec:MatLaskut

Matriisi on suorakulmainen lukukaavio. Matriiseja ovat esimerkiksi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (x_1 \ x_2 \ x_3) \text{ ja } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Matriiseihin perehtyminen voidaan perustella useilla järkisyillä.

1. Matriisien avulla voidaan suuria lukujoukkoja esittää mahdollisimman pienellä vaivalla ja kokonaisille lukukaavioille voidaan antaa nimiä $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ jne. Tämä helpottaa suuresti asioiden esittämistä. Eräissä tilanteissa matriisi on hyvin onnistunut ja havainnollinen tapa esittää lukuryhmiä. Esimerkiksi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$$

oleelliset osat tiivistyvät matriiseihin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ ja } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

2. Matriiseille voidaan määritellä yhteen- ja kertolasku. Matriiseilla voidaan siis laskea. Näiden laskutoimitusten avulla on kehitetty menetelmiä eräiden matriisien avulla kuvattavien ongelmien ratkaisemiseen. Esimerkkinä mainittakoon yhtälöryhmän ratkaiseminen.
3. Vaikka itse et koskaan harrastaisikaan matriisilaskentaa, niin varmaa on, että tietokoneesi harrastaa. Jos tietokone esimerkiksi ei löydä ratkaisua yhtälöryhmälle se yleensä antaa virheilmoituksen, jossa se kertoo mitä vikaa oli kerroinmatriisissa. Virheilmoituksen ymmärtäminen edellyttää matriisilaskennan perusteiden osaamista.
4. Matematiikassa tarkastellaan struktuureja, jotka muodostuvat olioista ja niille määritellyistä laskutoimituksista. Struktuureja luokitellessa on tapana sanoa, että tietyt ehdot täyttävä struktuuri on ryhmä (tarkemmin luvussa III), tietyt ehdot täyttävä ryhmä on rengas ja tietyt ehdot täyttävä rengas on kunta. Reaaliluvut muodostavat kunnan, ja kompleksiluvut muodostavat kunnan. Opiskelija on

peruskoulussa ja lukiossa harjoitellut laskutoimitusten suorittamista reaalitylukukunnassa. Kun sääntönä voidaan pitää, että reaalitylukuja ja kompleksilukuja lukuunottamatta mikään mielenkiintoinen struktuuri ei ole kunta, saatta peruskoulussa hankittu sujuva laskutaito aiheuttaa kitkaa tutustuttaessa uusiin matemaattisiin struktuureihin. Neliömatriisit muodostavat renkaan mutta eivät kuntaa. Niillä laskettaessa tulee muistaa, että matriisilla ei saa jakaa eikä supistaa (sillä kertolaskun käänteisalkiota ei aina ole olemassa) ja kertolasku ei ole vaihdannainen ($\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$). Tätä kautta matriisilaskenta kehittää teoreettisessa ajattelussa tarvittavaa tarkkuutta ja joustavuutta.

Määritelmä 56 Suorakulmainen lukukaavio, jossa on m vaakariviä ja n pystysaraketta on $m \times n$ -matriisi. Tyyppeä $m \times 1$ oleva matriisi on pystyvektori ja tyyppeä $1 \times n$ oleva matriisi on vaakavektori. Kaaviossa esiintyviä lukuja sanomme matriisialkioiksi.

Merkintäsopimuksia:

(1) Tulemme kirjoittamaan lukukaavion aina isojen sulkeiden sisään. On myös luvalista käyttää hakasulkumerkintää, mutta tässä monisteessa käytämme systemaattisesti kaarisulkeita.

(2) Matriisia merkitsemme kirjaimella (iso, vahvennettu ja kursiivi) ja matriisissa olevia alkioita merkitsemme samalla kirjaimella (pieni, vahventamaton ja kursiivi) varustettuna alaindeksein, jotka ilmaisevat millä rivillä ja missä sarakkeessa alkio on. Esimerkiksi a_{12} on matriisin $\mathbf{A}$ rivillä 1 sarakkeessa 2 oleva alkio.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(3) Vaakavektoria merkitään samoin kuin matriisia, mutta usein valitaan pieni kirjain, ja rivi-indeksi voidaan jättää pois. Pystyvektorin tapauksessa sarakeindeksi voidaan jättää pois.

$$\mathbf{r} = (r_{11} \ r_{12} \ \cdots \ r_{1n}) = (r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n), \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

(4) Fysiikassa ja tekniikassa on tapana merkitä vektoreita vahventamattomalla, kursivilla vektorilla, jonka päällä on nuoli.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

(5) Tulemme käyttämään kumpaakin merkintää (3 ja 4) vektorille. On tärkeätä, että opiskelija tottuu siihen, että eri tilanteissa käytetään hieman erilaisia merkintöjä.

Määritelmä 57 Usein käytämme matriisille merkintää $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Vastaavasti matriisin $\mathbf{A}$ alkion a_{ij} käytetään joskus merkintää $(\mathbf{A})_{ij}$.

Määritelmä 58 (a) Matriisit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ovat samat (identtiset, engl. equal), jos ne ovat saman kokoiset ja, $a_{ij} = b_{ij}$ kaikilla i, j . Tällöin merkitään $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

(b) Kahden $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja $\mathbf{B} = (b_{ij})$ summa on matriisi

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

(c) Reaaliluvun λ ja $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tulo $\lambda\mathbf{A}$ on $m \times n$ -matriisi $(\lambda \cdot a_{ij})$. (Kaikki alkion a_{ij} kerrotaan λ :lla.)

(d) Sovimme lisäksi merkintätavoista

$$\begin{aligned} (-1)\mathbf{A} &= -\mathbf{A}, \\ \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Esimerkki 59

$$\begin{aligned} 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Samankokoisten matriisien yhteen- ja vähennyslasku ja vähennyslasku ovat melko selviä asioita. Seuraavaksi määrittelemme matriisin kertomisen matriisilla.

Koulussa olet todennäköisesti oppinut kahden vektorin pistetulon $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$. Kertaamme asian ensin

Määritelmä 60 Kahden samanmittaisen vektorin $\vec{u} = (u_i)$ ja $\vec{v} = (v_i)$ pistetulo on

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Määritelmä 61 $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ja $n \times p$ -matriisin $\mathbf{B} = (b_{jk})$ matriisitulo $\mathbf{AB}$ on $m \times p$ -matriisi

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \vec{a}_{i\bullet} \cdot \vec{b}_{\bullet j}$$

(Siis: $\mathbf{AB}$:n rivillä i sarakkeessa j oleva luku on $\mathbf{A}$:n i :nnen rivin ja $\mathbf{B}$:n j :nnen sarakkeen pistetulo.)

Esimerkki 62 Seuraavassa esimerkissä on lisätty sarakkeita ja rivejä erottavat viivat joihinkin kaavioihin. Tämä ei ole kovin tavallista, mutta tässä tapauksessa saattaa helpottaa kaavion lukemista.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} & \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2)}{1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)} & \frac{2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3}{1 \cdot 0 + 0 \cdot 3} \\ \frac{0 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2)} & \frac{0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2)}{0 \cdot 0 + 3 \cdot 3} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c3s1esim1

Huomaa tyyppien yhteensopivuus $(3 \times 2\text{-matriisi})(2 \times 3\text{-matriisi}) = (3 \times 3\text{-matriisi})!$

Edeltävä määritelmä ja esimerkki kannattaa tiivistää seuraavalla tavalla: ”Kun ollaan laskemassa matriisia $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, niin laskettaessa lukua riville i sarakkeeseen j , tarvitaan ensimmäisestä matriisistä i :s rivi ja toisesta matriisistä j :s sarake. Rivin ja sarakkeen pistetulo antaa alkion tulo-kaavion vastaavaan paikkaan.”

Alla taulukossa (2) (sivu 75) on esitetty edeltävän esimerkin tulokaavion kaikkien alkoiden lasku ja erityisesti ”mistä luvut tulevat?”.

Taulukko 2. Esimerkissä (62) (sivu 74) laskettujen lausekkeiden sisältämien lukujen sijainti alkuperäisissä matriiseissa.

c3s1taulu1

mikä = mitä?	mistä luvut?
$c_{11} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0$	$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ \boxed{0} & -2 & 3 \end{pmatrix}$
$c_{12} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2)$	$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 \end{pmatrix}$
$c_{13} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3$	$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{0} \\ 0 & -2 & \boxed{3} \end{pmatrix}$
$c_{21} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ \boxed{0} & -2 & 3 \end{pmatrix}$
$c_{22} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 \end{pmatrix}$
$c_{23} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{0} \\ 0 & -2 & \boxed{3} \end{pmatrix}$
$c_{31} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ \boxed{0} & -2 & 3 \end{pmatrix}$
$c_{32} = 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 \end{pmatrix}$
$c_{33} = 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{0} \\ 0 & -2 & \boxed{3} \end{pmatrix}$

Esimerkki 63 Seuraavassa välimuotoja on vähemmän. Saatko saman tuloksen?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+0 & -1+0+0 \\ 0-2+0 & 0+0+9 \\ 2+1+0 & -1+0+3 \\ 2+0+0 & -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \\ 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Huomaa taas tyyppien yhteensopivuus $(4 \times 3\text{-matriisi})(3 \times 2\text{-matriisi}) = (4 \times 2\text{-matriisi})!$

Esimerkki 64 *Olkoon*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Laskemalla tulot nähdään, että a) tulo $\mathbf{AB}$ on hyvin määritelty ja laskettavissa, mutta tuloa $\mathbf{BA}$ ei voi laskea. b) Tulot $\mathbf{BC}$ ja $\mathbf{CB}$ voidaan laskea, mutta niistä saadaan eri tulokset. Siis $\mathbf{BC} \neq \mathbf{CB}$.

Esimerkki 65 *Huomaa, että vektoreiden*

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Matriisitulo ja pistetulo ovat tarkasti tulkittuina eri asiat

$$\mathbf{uv} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 28$$

Esimerkki 66 *Luvun alussa esiintyi yhtälöryhmä ja siihen liittyvät matriisit*

$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ ja } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Matriisikertolaskun määritelmästä ja matriisien yhtäsuuruuden määritelmästä seuraa, että seuraavat kolme riviä sanovat saman asian:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{4.1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases} \tag{4.3}$$

Määritelmä 67 Nollamatriisi $\mathbf{O}$ on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia. Jos matriisissa on sarakkeita yhtä monta kuin riviä, se on neliömatrissi. $n \times n$ -neliömatrissin (a_{ij}) päälävistäjä muodostuu alkiosta a_{kk} , $1 < k < n$. Neliömatrissi on diagonaalinen, jos sen ainoat nollasta eroavat alkiot ovat päälävistäjällä. Neliömatrissi $\mathbf{I}$ on yksikkömatrissi, jonka päälävistäjän alkiot ovat ykkösiä ja muut alkiot ovat nollia.

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

Seuraava määritelmä saattaa tuntua keinotekoiselta, mutta määritelmässä esitelty Kroneckerin delta on paljon käytössä teknisessä laskennassa. Asia on ulkoa opettelu arvoisen.

Määritelmä 68 *Kroneckerin delta on*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j \\ 0, & \text{kun } i \neq j \end{cases}$$

Siiis $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$.

Seuraavilla lauseilla on täsmällinen matemaattiseen käsitteistöön liittyvä merkitys, johon palataan opetuksessa myöhemmin. Lauseet (69) ja (70) luettelevat matriiseille voimassa olevia tavallisesta laskemisesta tuttuja ominaisuuksia. Esimerkki (71) kertoo missä suhteessa matriiseilla laskeminen poikkeaa reaalityyppien laskemisesta. (Tässä vaiheessa on tärkeää muistaa esimerkin (71) antama viesti.) Lauseet on koottu peräkkäin, jotta kaavat olisivat helposti silmälaitavissa. Todistukset on esitetty esimerkin jälkeen. Seuraavassa merkinnät $+_m$ ja $\cdot_m$ tarkoittavat matriisien laskutoimituksia.

h ominaisuuudet

Lause 69 *Olko $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ $m \times n$ -matriiseja ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ reaalityyppejä. Silloin*

- (1) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- (2) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$
- (3) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$
- (4) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- (5) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- (6) $\alpha(\beta \mathbf{A}) = (\alpha\beta) \mathbf{A}$
- (7) $(\alpha + \beta) \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A}$
- (8) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}$

Kommentteja: (1) $+_m$ on liitännäinen (eli assosiatiivinen), (2) nollamatriisi on $+_m$:n neutraalialkio, (3) $-\mathbf{A}$ on $\mathbf{A}$:n käänteisalkio, (4) $+_m$ on vaihdannainen (eli kommutatiivinen)

n ominaisuuudet

Lause 70 Olkoon $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ matriiseja ja $\alpha \in \mathbb{R}$ reaaliluku. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin silloin

- (1) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- (2) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- (3) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- (4) $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$
- (5) $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$

Kommentteja: (1) $\cdot_m$ on liitännäinen (assosiatiivinen), (2,3) $+_m$ ja $\cdot_m$ noudattavat osittelulakeja, (5) $\mathbf{I}$ on matriisikertolaskun $\cdot_m$ neutraalialkio.

kussa on outoa

Esimerkki 71 Olkoon $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ matriiseja. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin on mahdollista, että

- (1) $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- (2) $(\mathbf{AC} = \mathbf{BC})$ vaikka $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$
- (3) $(\mathbf{AB} = \mathbf{O})$ vaikka $(\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ ja $\mathbf{B} \neq \mathbf{O})$

Lauseiden (69) ja (70) osalta todistamme vain muutaman kohdan ja esimerkin (71) väitteet osoitetaan oikeiksi antamalla esimerkki jokaiseen kohtaan.

Todistuksia: (Lause (69) väite (I))

$$\begin{aligned} \forall i, j: (\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}))_{ij} &= a_{ij} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} + c_{ij} = ((\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C})_{ij} \end{aligned}$$

(Lause (70) väite (I)) Olkoot $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ tyyppejä $m \times n$, $n \times p$ ja $p \times r$ olevia matriiseja. Silloin matriisit $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ ja $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ ovat kumpikin tyyppiä $m \times r$ ja

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \text{ ja } (\mathbf{BC})_{st} = \sum_{q=1}^p a_{sq}b_{qt}$$

joten

$$\begin{aligned}
 ((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{ij} &= \sum_{q=1}^p (\mathbf{AB})_{iq} c_{qj} = \sum_{q=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kq} \right) c_{qj} \\
 &= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1})c_{1j} \\
 &\quad + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{in}b_{n2})c_{2j} \\
 &\quad + \cdots \\
 &\quad + (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \cdots + a_{in}b_{np})c_{pj} \\
 &= a_{i1}(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + \cdots + b_{1p}c_{pj}) \\
 &\quad + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \cdots + b_{2p}c_{pj}) \\
 &\quad + \cdots \\
 &\quad + a_{in}(b_{n1}c_{1j} + b_{n2}c_{2j} + \cdots + b_{np}c_{pj}) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{q=1}^p b_{kq} c_{qj} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} (\mathbf{BC})_{kj} \\
 &= (\mathbf{A}(\mathbf{BC}))_{ij}
 \end{aligned}$$

th_matkerto:kertolaskun ominaisuudet
(Lause (70) väite (2))

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}))_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} (\mathbf{B} + \mathbf{C})_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \\
 &= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \cdots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj}) \\
 &= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{in}c_{nj}) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = (\mathbf{AB} + \mathbf{AC})_{ij}
 \end{aligned}$$

th_matkerto:kertolaskun ominaisuudet
(Lause (70) väite (5)) Tutkitaan $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $m \times m$ -yksikkömatriisin $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$ ja $n \times n$ -yksikkömatriisin $\mathbf{J} = (\delta_{ij})$ tuloja.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{IA})_{ij} &= \sum_{k=1}^m \delta_{ik} a_{kj} = \delta_{i1}a_{1j} + \delta_{i2}a_{2j} + \cdots + \delta_{im}a_{mj} = a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} \\
 (\mathbf{AJ})_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} = a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + \cdots + a_{in}\delta_{nj} = a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}
 \end{aligned}$$

c3s1esim2:mik\IeC {\\"a} matlaskussa on outoa
(Esimerkki (71) Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Silloin suora lasku osoittaa, että:

- (1) $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$,
- (2) $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$, vaikka $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$,
- (3) $\mathbf{DE} = \mathbf{O}$, vaikka $\mathbf{D} \neq \mathbf{O}$ ja $\mathbf{E} \neq \mathbf{O}$.

4.2 Transponointi

sec:MatTransp

Seuraavassa määriteltävää transpoosimerkintää käytetään paljon. Vaikka asia on yksinkertainen, sen pitää tulla täydellisen tutuksi.

Määritelmä 72 $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ transponoitu matriisi eli transpoosi on $n \times m$ -matriisi $\mathbf{A}^T$ jolle

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji}.$$

(Matriisi $\mathbf{A}^T$ saadaan siis $\mathbf{A}$:sta vaihtamalla vaakarivit pystysarakkeiksi.)

Esimerkki 73

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(Huomaa: vasen ylänurkka pysyy paikallaan, ensimmäisestä rivistä tulee ensimmäinen sarake, toisesta rivistä tulee toinen sarake, ...)

Lause 74 Jos matriisien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ väliset laskutoimitukset ovat määriteltyjä ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin

- (1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- (2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
- (3) $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$
- (4) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ «« TÄRKEÄ!

Todistus: Kohdat (1) - (3) nähdään välittömästi. (4):

$$((\mathbf{AB})^T)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{B}^T)_{ik}(\mathbf{A}^T)_{kj} = (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ij}$$

Esimerkki 75 Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ ja } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Lasketaan ensin väitteen (4) mukaiset lausekkeet

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Seuraavaksi kirjaamme uudelleen samat laskut, mutta nyt merkitsemme erityisesti mistä tulevat ne luvut joista laskemme tulomatriisin rivillä yksi sarakkeessa kaksi olevan alkion 43.

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{5} & 6 \\ \boxed{7} & 8 \end{pmatrix} \right) \right)^T = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ \boxed{43} & 50 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & \boxed{43} \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} \boxed{5} & \boxed{7} \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} \\ 2 & \boxed{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & \boxed{43} \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Määritelmä 76 Neliömatriisi $\mathbf{A}$ on symmetrinen, jos $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ (eli $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$) ja antisymmetrinen, jos $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ (eli $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$)

Jokainen matriisi voidaan esittää symmetrisen ja antisymmetrisen matriisin summana

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- \quad \text{missä}$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \text{ on symmetrinen, ja}$$

$$\mathbf{A}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \text{ on antisymmetrinen.}$$

Jos esimerkiksi

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{niin} \\ \mathbf{A}^+ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}^- &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \\ \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- &= \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

4.3 Käänteismatriisi

Sec:MatInv

Reaalilukujen tapauksessa luvun a käänteisluku a^{-1} on sellainen luku, että $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$ (missä $1 =$ kertolaskun neutraalialkio). Matriisin käänteismatriisilta vaaditaan täsmälleen sama ominaisuus. Asioita mutkistaa se, että kaikilla $\mathbf{O}$:sta poikkeavilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia.

Määritelmä 77 Neliömatriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen, jos on olemassa käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ siten, että $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

sikäisitteisyys

Lause 78 Jos neliömatriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen, niin

(1) käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ on yksikäsitteinen ja

(2) matriisiyhtälöllä $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$.

Todistus: Todistus perustuu käänteismatriisin määritelmään, matriisikertolaskun liitännäisyyteen ja matriisilaskujen osittelulakeihin (lause (70)(1,2)). th matkerto:kertolaskun ominaisuudet

(1) Olkoot $\mathbf{V}$ ja $\mathbf{W}$ kaksi $\mathbf{A}$:n käänteismatriisia. Silloin

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{I} = \mathbf{V}(\mathbf{A}\mathbf{W}) = (\mathbf{V}\mathbf{A})\mathbf{W} = \mathbf{I}\mathbf{W} = \mathbf{W}$$

(2) $\mathbf{A}^{-1}\vec{b}$ on matriisiyhtälön $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ ratkaisu, sillä

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\vec{b}) = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})\vec{b} = \vec{b}$$

Olkoot $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ kaksi matriisiyhtälön $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ ratkaisua. Silloin

$$\begin{aligned} \vec{v} - \vec{w} &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}(\vec{v} - \vec{w})) = \mathbf{A}^{-1}(\vec{b} - \vec{b}) = \mathbf{A}^{-1}\vec{0} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{v} &= \vec{w} \end{aligned}$$

□

Edellisen lauseen väite (2) merkitsee sitä, että kun yhtälöryhmässä on yhtä monta yhtälöä kuin muuttujaa, niin ratkaisu saadaan helposti, jos kerroinmatriisin käänteismatriisi on tiedossa. Tulemme seuraavassa kappaleessa esittelemään keinon, jolla käänteismatriisi saadaan määritettyä. Myöhemmin tässä luvussa esitämme samaan tarkoitukseen vielä toisen keinon.

Kysymys siitä, milloin neliömatriisi on säännöllinen saa seuraavissa kapaleissa yksinkertaisen vastauksen. Seuraavassa luvussa yleistämme säännöllisyyden käsitteen matriiseille, joilla on rivejä enemmän kuin sarakkeita. Yleistys auttaa käsittelemään yhtälöryhmiä, joissa on yhtälöitä enemmän kuin muuttujia.

Kaikesta edellä sanotusta voimme todeta, että olemme nyt saavuttaneet erään tämän kurssin ydin-asian: ”matriisin säännöllisyys ja käänteismatriisin määrittäminen”.

Esimerkki 79 Tarkastellaan esimerkkinä lauseen ^{th_c3s3a:kmatr_yksikasitteisyys} (78) väitteeseen (2) yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kerroinmatriisi ja sen käänteismatriisi ovat

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

sillä

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lauseen mukaan yhtälöryhmän ratkaisu saadaan kaavalla

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sijoittamalla alkuperäisen yhtälöryhmään huomaa, että ratkaisu on oikea.

Seuraavaksi listaamme joukon käänteismatriisin ominaisuuksia.

Lause 80 Olkoot $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ säännöllisiä $n \times n$ -matriiseja. Silloin myös $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^T$ ja $\mathbf{AB}$ ovat säännöllisiä ja

- (1) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- (2) $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}$
- (3) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ «« TÄRKEÄ!
- (4) $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

Todistus:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{cases} (\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}) = \mathbf{I} \\ (\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I} \end{cases} \\
 (2) \quad & \begin{cases} (\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1} \mathbf{A}^{-1}) = \lambda \cdot \lambda^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \\ (\lambda^{-1} \mathbf{A}^{-1})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^{-1} \cdot \lambda \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I} \end{cases} \\
 (3) \quad & \begin{cases} (\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \\ (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I} \end{cases} \\
 (3) \quad & \begin{cases} (\mathbf{A}^T)(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{I} \\ (\mathbf{A}^{-1})^T(\mathbf{A}^T) = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I} \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

Lause 81 Jos matriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen, niin

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (\mathbf{AB} = \mathbf{AC}) \Rightarrow (\mathbf{B} = \mathbf{C}) \\
 (2) \quad & (\mathbf{BA} = \mathbf{CA}) \Rightarrow (\mathbf{B} = \mathbf{C}) \\
 (3) \quad & (\mathbf{AB} = \mathbf{O}) \Rightarrow (\mathbf{B} = \mathbf{O}) \\
 (4) \quad & (\mathbf{BA} = \mathbf{O}) \Rightarrow (\mathbf{B} = \mathbf{O})
 \end{aligned}$$

Todistus: (1) $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AC} = \mathbf{C}$, (2) vastaavasti ja (3) seuraa (1):stä, kun $\mathbf{C} = \mathbf{O}$. (4) vastaavasti. □

Siis esimerkiksi (71) sivulla 78 mainitut ongelmat (2) ja (3) eivät koske säännöllisiä neliömatriiseja. Esimerkin (71) yhteydessä on tapana sanoa, että ”matriisilla ei saa jakaa, mutta käänteismatriisilla saa kertoa (jos käänteismatriisi on olemassa).”

4.4 Matriisit ja vektorit Octavessa (kesken)

Sec:MVOct

Kappale
kesken

Octavea on jo käytetty lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemisessa. Nyt käytämme samaa ohjelmaa matriisi- ja vektori-laskujen laskemiseen.