

```

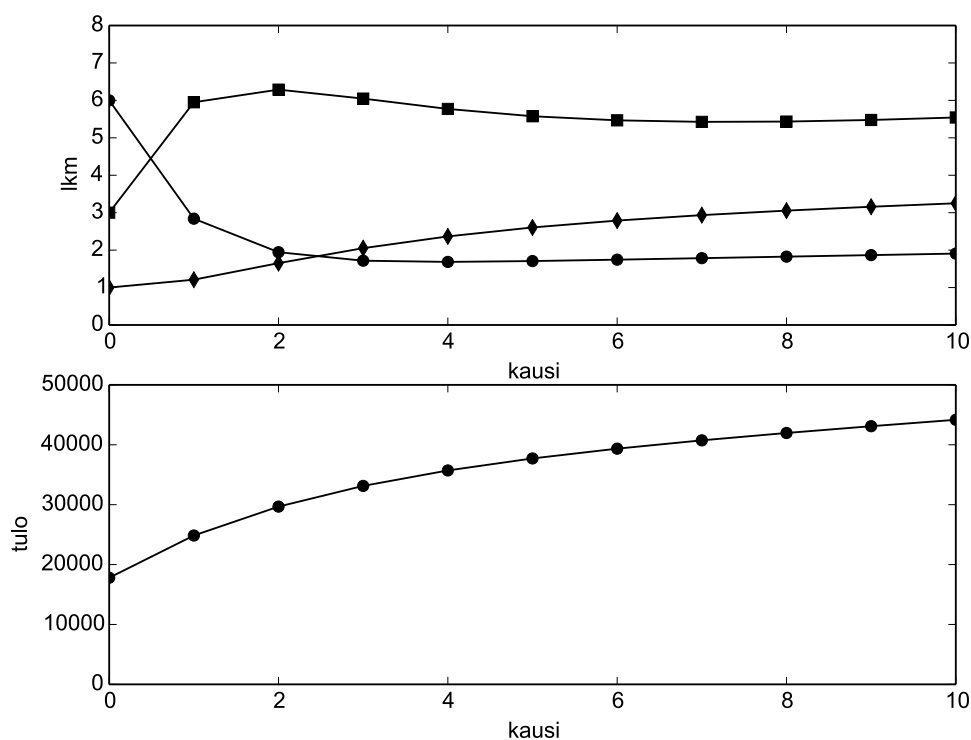
kuva1.plot(x,n1,'k-o',x,n2,'k-s',x,n3,'k-d');
kuva1.set_xlabel('kausi');
kuva1.set_ylabel('lkm');
kuva1.axis([0,10,0,8]);

kuva2 = fig.add_subplot(212);
kuva2.plot(x,tulo,'k-o');
kuva2.set_xlabel('kausi');
kuva2.set_ylabel('tulo');
kuva2.axis([0,10,0,50000]);

plt.show()

```

Ohjelman piirtämä graafi on kuvassa [LAPc3s1fig2](#) 23.



Kuva 23. Ryhmien koko ja tallin tulo tulevina kausina.

4.6 Matriisin kääntäminen rivioperaatioilla

InvGaussJordan

Seuraavassa esitetty Gaussin algoritmi perustuu tuttuihin rivioperaatioihin. Teoria on esitetty mahdollisimman lyhyesti ja esimerkit saavat selvittää asian. Algoritmi esite-

tään vasta lopuksi, koska se tiivistää esimerkit.

Olkoon $\mathbf{A}$ seuraavassa $n \times n$ -matriisi. Rivioperaatiot voidaan muuntaa matriisilla (rivioperaattorilla) kertomiseksi seuraavalla tavalla:

1) kahden rivin vaihto

Kun matriisi $\mathbf{A}$ kerrotaan matriisilla (rivioperaattorilla)

$$\mathbf{E}_{p;q}^{\text{vaihda}} = (e_{ij}), \text{ missä } \begin{cases} e_{pq} = e_{qp} = 1 \\ e_{ii} = 1, \text{ kun } i \neq p \text{ ja } i \neq q \\ e_{ij} = 0, \text{ muulloin} \end{cases},$$

niin rivit p ja q vaihtavat paikkaa.

Esim:

$$\mathbf{E}_{1;2}^{\text{vaihda}} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 11 & 12 & 13 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$$

2) rivin kertominen luvulla λ

Kun matriisi $\mathbf{A}$ kerrotaan matriisilla (rivioperaattorilla)

$$\mathbf{E}_{p;\lambda}^{\text{kerro}} = (e_{ij}), \text{ missä } \begin{cases} e_{pp} = \lambda \\ e_{ii} = 1, \text{ kun } i \neq p \\ e_{ij} = 0, \text{ muulloin} \end{cases},$$

niin rivi p tulee kerrotuksi luvulla λ .

Esim:

$$\mathbf{E}_{2;10}^{\text{kerro}} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 210 & 220 & 230 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$$

3) rivin p lisääminen luvulla λ kerrottuna riviin q

Kun matriisi $\mathbf{A}$ kerrotaan matriisilla (rivioperaattorilla)

$$\mathbf{E}_{p,q;\lambda}^{\text{lisaa}} = (e_{ij}), \text{ missä } \begin{cases} e_{ii} = 1, \forall i \\ e_{qp} = \lambda \\ e_{ij} = 0, \text{ muulloin} \end{cases},$$

niin rivi p tulee lisätyksi luvulla λ kerrottuna riviin q .

Esim:

$$\mathbf{E}_{1,2;100}^{\text{lisaa}} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 1121 & 1222 & 1323 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$$

Kaikki edellä esiintyneet rivioperaattorit ovat säännöllisiä sillä helposti nähdään että

$$\left(E_{p,q}^{\text{vaihto}}\right)^{-1} = E_{p,q}^{\text{vaihto}}, \quad \left(E_{p;\lambda}^{\text{kerro}}\right)^{-1} = E_{p;1/\lambda}^{\text{kerro}} \quad \text{ja} \quad \left(E_{p,q;\lambda}^{\text{lisaa}}\right)^{-1} = E_{p,q;-\lambda}^{\text{lisaa}},$$

Lause 83 *Olkoon $\mathbf{A}$ säännöllinen $n \times n$ -matriisi. Jos on olemassa $n \times n$ -matriisi $\mathbf{B}$, jolle $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, niin $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$.*

Todistus: $\mathbf{AB} = \mathbf{ABAA}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{I}$ □

Lause 84 *Olkoon $\mathbf{A}$ säännöllinen $n \times n$ -matriisi. Jos $\mathbf{A}$ voidaan muuttaa jonolla rivioperaatioita yksikkömatriisiksi $\mathbf{I}$, niin kääntematriisi $\mathbf{A}^{-1}$ saadaan tekemällä samat rivioperaatiot yksikkömatriisille $\mathbf{I}$.*

Todistus: Olkoon $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ jono rivioperaattoreita siten, että $\mathbf{E}_n \cdots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Silloin edellisen lauseen mukaan

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n \cdots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_n \cdots \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{I}$$

□

Esimerkki 85 *Määritetään kääntematriisi matriisille*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kirjoitetaan ensin kaavio $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$, jolle ryhdymme tekemään rivioperaatioita. Tällä var-

mistamme, että $\mathbf{I}$:hin kohdistuu täsmälleen samat rivioperaatiot kuin $\mathbf{A}$:han.

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{A}|\mathbf{I}) \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} [1] & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & [2] & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ -1 \\ \leftarrow \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & (2) & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 4 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ -2 \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 0 & 0 & 16 & 7 & 4 \\ 0 & (2) & 0 & -7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & [1] & 4 & 2 & 1 \end{array} \right) :2 \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 16 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right) \\
 & \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 4 \\ -7/2 & -3/2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Tarkistus

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 7 & 4 \\ -7/2 & -3/2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 16 & 7 & 4 \\ -7/2 & -3/2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Esimerkki 86 Määritetään käänteismatriisi matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{A}|\mathbf{I}) \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} [1] & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} +1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right| \begin{array}{l} +2 \\ \\ \leftarrow \end{array} \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & [2] & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \leftarrow \\ +1/2 \\ \leftarrow \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ +3/2 \\ \leftarrow \end{array} \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 0 & -1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & (2) & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & [0] & 7/2 & 3/2 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Viimeinen pivotointi epäonnistuu, jonka tulkitsemme merkiksi siitä, että matriisilla ei ole käänteismatriisia.

Edellä kuvattu menetelmä johtaa helposti hankaliin murtolukulaskuihin, mutta se on erittäin suoraviivainen ja sellaisena helppo omaksua.

Gaussin algoritmi (käänteismatriisin määrittämiseksi):

- (0) Aseta $k = 1$, $\mathbf{B}(1) = (\mathbf{A}|\mathbf{I})$.
- (1) Otetaan tukialkioksi (pivot element) alkio $b(k)_{kk}$.
- (2) Jos tukialkio on 0 ja tukialkion sarakkeessa tukialkion alapuolella on nollasta poikkeava alkio $b(k)_{rk}$, $r > k$, vaihdetaan rivit r ja k keskenään. Jos tukialkio on 0 ja sen alapuolelta ei löydy nollasta poikkeavaa alkioita, lopetetaan ja todetaan ettei käänteismatriisia ole olemassa.
- (3) Jaetaan tukialkion rivi tukialkiolla. (Eli tehdään tukialkio 1:ksi.)
- (4) Lisätään tukialkion rivi muihin riveihin sopivalla luvulla kerrottuna siten, että tukialkion ylä- ja alapuolella olevat alkion muuttuvat nolliksi.
- (5) Jos $k < n$, niin kasvatetaan k :ta yhdellä ja siirrytään kohtaan (1).
- (6) $\mathbf{A}^{-1}$ on saadun $n \times 2n$ -matriisin $\mathbf{B}(k)$ oikea puolikas.

4.7 Yhtälöryhmän ratkaisun herkkyyys

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 2y + 2z = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=\vec{x}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}_1}$$

ratkaisu on

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jos jonkun yhtälön RHS muuttuu, niin myös ratkaisu muuttuu.

Jos kolmannen yhtälön RHS kasvaa arvosta 4 arvoon 5, niin yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu. Uusi ratkaisu on

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 2y + 2z = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=\vec{x}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}_2}$$

ratkaisu on

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Muutos ratkaisussa on

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2 \\ 0.75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75 \\ 1 \\ -1.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Kun siis yhdenkin yhtälön RHS muuttui, niin jokaisen muuttujan arvo ratkaisussa muuttui!

Jos pienikin muutos yhtälöryhmän RHS-luvuissa saa aikaan suuria muutoksia muuttujien ratkaisu-arvoihin sanomme, että yhtälöryhmä on herkkä. Herkkyydelle on olemassa mitta (kerroinmatriisin kuntoluku), mutta emme opettele sitä vielä nyt.

Toinen esimerkki

Edellisessä esimerkissä muutos RHS:ssä oli melko suuri. Seuraavaksi katsomme vastaavan esimerkin, jossa RHS:n muutos on pienempi (realistisempi, koska pieniä muutoksia on aina).

Olkoon yhtälöryhmän kertoimet samat kuin edellisessä esimerkissä. Alkutilanteen RHS on

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ja lopputilanteen RHS olkoon

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4.1 \end{pmatrix} = \vec{b}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \Delta\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} = 0.1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \vec{b}_1 + \Delta\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4.1 \end{pmatrix}$$

Laskemme vastaavan muutoksen ratkaisuvektorissa $\vec{x}$:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{x} &= \vec{x}_3 - \vec{x}_1 = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}_3 - \mathbf{A}^{-1}\vec{b}_1 \\ &= \mathbf{A}^{-1}(\vec{b}_3 - \vec{b}_1) = \mathbf{A}^{-1}\Delta\vec{b} \quad \longrightarrow \boxed{\Delta\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\vec{b}} \\ &= 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -0.75 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1.5 & 2 & -1.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.075 \\ 0.1 \\ -0.125 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esimerkkien yhteenveto

Yksinkertainen periaate: Tarkastellaan yhtälöryhmää $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Jos k :nnen yhtälön RHS kasvaa yhdellä, niin ratkaisuvektori muuttuu määrällä, joka on kerroinmatriisin käänteismatriisin k :nnes sarake.

Merkitään $\mathbf{A}$:n käänteismatriisin k :tta saraketta vektorilla $\vec{u}_k = (u_{1k} \ u_{2k} \ \dots \ u_{nk})^T$

Täsmällisempi periaate: Tarkastellaan yhtälöryhmää $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Jos yhtälöryhmän RHS kasvaa määrällä $\Delta\vec{b} = (\Delta b_1 \ \Delta b_2 \ \dots \ \Delta b_n)^T$, niin ratkaisuvektori muuttuu määrällä

$$\Delta\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\vec{b} = \Delta b_1 \vec{u}_1 + \Delta b_2 \vec{u}_2 + \dots \Delta b_n \vec{u}_n$$